بحوث العمليات

Operation Research

تأليف
دكتور سليمان محمد مرجان

بسم الله الرحمن الرحيم

المحتويات

Contents

المقدمة

Introduction

يسمع الكثير من الناس كلمة إدارة ويستعملونها، ولكن القليل منهم يدركون معنى هذا التعبير. وتعتبر كلمة إدارة بالنسبة إلى العديد من الناس أنها مرادفة لكلمة روتين في الدوائر الحكومية أو كلمة بيروقراطية. غير أن كلا التفسيرين خطأ، لأن الإدارة قد تتضمن المعنيين معاً، ولكنهما بحد ذاتهما لا يشكلان أي جزء من مفهوم الإدارة. والواقع أن الإدارة تكمن وراء نجاح أي شركة أو عمل أو دولة أو جيش، كما أنها المسؤولة عن فشلها.

يعيش العالم اليوم عصر المعلومات وأنظمتها وتقنيتها والبحث عن أفضل استخدامات لها بأقل تكلفة لإنتاجها. ذلك لأن المعلومات السليمة تؤدي إلى قرارات سليمة، ومن ثم تؤثر إيجاباً على موارد المجتمعات وثرواتها، وبالتبعية رفاهية أفرادها، كما تؤدي إلى كشف الإمكانيات الحقيقية لتقدم المجتمعات ونموها. ويعتبر النظام الإداري، في ظل الثورة التقنية التي نعيشها، أهم الأنظمة المنتجة للمعلومات المفيدة في اتخاذ قرارات اقتصادية تؤثر في رفاهية الأفراد والمجتمعات. ولعل بحوث العمليات تمثل أهم جزئية من النظام الإداري تختص بمساعدة المسؤولين باتخاذ القرارات، لا من حيث توفير المعلومات فحسب، وإنما أيضاً من حيث عرض بدائل النماذج والأساليب المساعدة في اتخاذ القرارات المعقدة متعددة القيود والمتغيرات.

وتعد الإدارة من أهم فروع المعرفة الإنسانية التي تهتم بإدارة المشاريع وتوليد وإنتاج بيانات ومعلومات ذات خصائص اقتصادية. وعادة ما تتعلق البيانات والمعلومات الإدارية بمواضيع أو ظواهر أو مظاهر اقتصادية، وتخدم ذوي العلاقة بها أو ذوي المصالح فيها، وخاصة في شأن اتخاذ قرارات منتجة لآثار اقتصادية على موارد الوحدات الاقتصادية والمجتمع.

وقد ازدادت أهمية أنظمة المعلومات بصفة عامة، وأنظمة المعلومات الإدارية بصفة خاصة في العصر الحديث نتيجة لعديد من العوامل والمتغيرات. فنحن نعيش عصر ثورة علمية في جميع المجالات لم يسبق لها مثيل في حياة البشرية. وقد أدت تلك الثورة، وما زالت، إلى تعقد الحاجات والمصالح وتشابكها، وتنوع وتغير سبل تحقيقها، وزيادة الحاجة إلى معلومات مفيدة وصالحة عن كل متغيراتها الهامة ومؤثراتها ونتائجها. وأدى

ذلك بالتبعية إلى آثار قوية وملحوظة على طريقة إدارة الموارد الاقتصادية المتاحة للوحدات الاقتصادية والمجتمع، واتخاذ القرارات السليمة في شأن تخصيصها وتوجيهها إلى أوجه الاستخدام البديلة، ومتابعة كفاءة استخدامها وفعالية استخدامها في تحقيق النتائج المرغوبة من هذا الاستخدام.

فبالإضافة إلى الجوانب الفنية التقنية التي نتجت عن الثورة العلمية التي نعايشها، فهي أدت تغيرات بيئية واقتصادية واجتماعية وسياسية وتنظيمية وسلوكية هيكلية متشابكة، منتجة لآثار اقتصادية معقدة ومتداخلة. وقد أدى ذلك إلى تولد حاجات جديدة إلى بيانات معلومات ذات خصائص ونوعيات متعددة، لفهم هذه المتغيرات، ومثيراتها وآثارها والتحكم فيها وتوجيهها إلى ما يحقق المصالح الاقتصادية والاجتماعية العامة والخاصة.

فقد أدت التغيرات الاجتماعية والسياسية، على سبيل المثال، إلى ظهور الحاجة إلى مزيد من العناية بالمسؤولية الاجتماعية للوحدات والمنظمات الاقتصادية في شأن تنمية وحماية البيئة، وتنمية الموارد المادية والبشرية المتاحة، وغير ذلك من المسؤوليات ذات الطابع السياسي الاجتماعي، والمنتجة لآثار اقتصادية حقيقية. وقد أدى ذلك بالطبع، نظراً لطبيعة نطاق وعناصر المسؤوليات الجديدة، إلى قصور الاعتماد على البيانات والمعلومات الكمية ذات الطبيعة المالية في تخطيط وتوجيه الموارد للوفاء بها. وأصبحت البيانات والمعلومات غير الكمية أو الكمية التي لا تقبل القياس النقدي في صورة مالية من الأهمية بمكان بصدد وضع ما يلزم من سياسات وقيام ما يلزم من ضوابط للوفاء بهذه المسؤوليات.

كما أدت الثورة العلمية إلى تغيرات فنية وتقنية انعكست على شكل الوحدات والمنظمات الاقتصادية وهيكلتها، وعلاقات تداخلها، وتشابك مصالحها وأهدافها. فقد أدت هذه التغيرات إلى زيادة الحجم الاقتصادي للوحدات والمنظمات وتعدد أهدافها، وتنوع إنتاجها، وانتشار فروعها دولياً، وقيامها بمهام سياسية واجتماعية بالإضافة إلى مهامها الاقتصادية. كل ذلك في ظل ظروف اقتصادية تبدو مختلفة هيكلياً، حيث يسود التضخم مع البطالة، والقصور الشديد في العمالة الفنية المدربة القادرة على التعامل والتفاعل مع فنون الإنتاج والتقنية الحديثة، مع استمرار الشكوى من التضخم السكاني.

وقد امتدت آثار الثورة العلمية إلى ميدان إنتاج وتوليد البيانات والمعلومات، حيث أصبحت كفاءة نظام المعلومات في إنتاج ما يلزم من بيانات ومعلومات، لحل المشاكل الاقتصادية والسياسية والاجتماعية والبيئية والفنية المتداخلة والمعقدة، هي المحدد الأساسي والرئيسي لفعالية السياسات والخطط التي تم وضعها لهذا الغرض، في إيناء الثمار المستهدفة والمرغوبة منها. وبذلك لم يصبح نظام المعلومات التقليدي بما يؤديه من مهام روتينية في إنتاج بيانات ومعلومات نمطية، ملائماً للوفاء بالاحتياجات الجديدة، كما أن السرعة المطلوبة والتوقيت المرغوب والتفاصيل الضرورية والنوعيات اللازمة في هذه

المعلومات والبيانات أصبحت خارج نطاق الإمكانيات المحدودة لأنظمة المعلومات التقليدية. ولم تهمل الثورة العلمية بدورها هذا الجانب الهام والجوهري، بل بالعكس كان الاهتمام بتطوير أنظمة المعلومات ورفع كفاءاتها وزيادة سعتها وقدراتها هي من المحاور التي ارتكزت عليها الثورة في انتشارها واستمرارها. وبذلك فقد أصبحت أنظمة المعلومات الإلكترونية ذات القدرات والإمكانيات الهائلة هي المبدأ بينما أنظمة المعلومات التقليدية، يدوية كانت أو آلية، هي استثناء غير مرغوب. كما أصبحت بنوك المعلومات بالنسبة للثورة العلمية هي ركيزة ضمان استمرارها، وبالنسبة للسياسة الاقتصادية هي مقومات زيادة احتمال سلامتها، وبالنسبة للخطط الاجتماعية والبيئية هي قوام تناسقها وكفاءتها في إيناء ثمارها. وبالتالي فإن كنا نعيش عصر ثورة علمية فهو في الحقيقة وبالإضافة عصر أنظمة المعلومات الحديثة.

تحظى عملية اتخاذ القرارات الإدارية من خلال استخدام أسلوب علم الإدارة (بحوث العمليات) في الوقت الحاضر باهتمام كثير من الدارسين والمهتمين والممارسين للإدارة. فالدارسون للعلوم الإدارية يجدون في هذا المجال أسلوباً حديثاً ومتطوراً في تحليل البيانات تحليلاً كمياً يساير حركة الإدارة في الاتجاه العلمي. أما الممارسون للأعمال الإدارية فإن اهتمامهم باستخدام هذا الأسلوب الجديد في اتخاذ القرارات الإدارية أصبح يتزايد باستمرار. وذلك برغبتهم في الاستفادة من هذه العلوم الإدارية المتطورة، نظراً لما تعطيه من إمكانيات وقدرات أكبر في مجال التحليل وإنجازات لا يمكن التغاضي عنها في وقت أصبحت فيه الحاجة ماسة إلى هذه القدرات والإمكانيات. وعلى الرغم من هذا الأسلوب الكمي المتطور لا يصف في كثير من الحالات العوامل السلوكية المتعددة على وجه الدقة، وإنه يضع قواعد وإجراءات يمكن أن تفيد كثيراً في وضع الحلول المثلى، خاصة في المشروعات الكبيرة والتي تتميز عملياتها الإدارية في عصرنا الحاضر وأصبحت معقدة ومتشابكة إلى الحد الذي يجعل من اتخاذ القرارات مشكلة تتطلب الكثير من البيانات النوعية والكمية، بالإضافة إلى استخدام الأدوات والأساليب القياسية التي تسهم في تحليل هذه البيانات بغية الوصول إلى الحلول المثلى.

ولذلك استقر الرأي على عنوان هذا الكتاب في العلوم الإدارية على أن يكون في مجال بحوث العمليات المتعلقة بعملية اتخاذ القرارات. تناول الكتاب بالدراسة والتحليل أهم الأساليب الكمية في الإدارة وكيفية استخدامها في معالجة المشاكل الإدارية والإنتاجية والصناعية وذلك من خلال **ثمانية** فصول رئيسية. ويستهدف هذا الكتاب **في الفصل الأول** الآتي: يتناول عرض وتوضيح موضع أو مكانة بحوث العمليات بين فروع المعرفة الإدارية. ويؤكد على أن اختصاصها ينصب على المعلومات المستقبلية، ويعرض نماذج وأدوات اتخاذ القرارات، حيث تم التعرض فيه إلى مفهوم بحوث العمليات: كيف نشأت، وكيف تطورت، وما مدى أهميتها كأداة لاتخاذ القرارات، ثم ما المراحل التي

يجب المرور بها للتوصل إلى القرار السليم وفقاً لهذا المنهج. **الفصل الثاني** توضيح مبسط لعملية صناعة واتخاذ القرارات، وذلك من حيث المفاهيم الأساسية التي تقوم عليها هذه النظرية، ومراحل اتخاذ القرارات وفقاً لها، ثم الظروف المختلفة التي تتخذ فيها القرارات. ونظراً لأن المشروعات تعمل في بيئة ديناميكية متغيرة وغير مستقرة، إذاً لا بد من دراسة نظرية الاحتمالات، قبل الخوض في الموضوعات الأخرى التي تشكل الاحتمالات أساساً لفهمها، لذلك فقد خصص الملحق في نهاية هذا الكتاب لدراسة هذه النظرية. **الفصل الثالث** عرض بطريقة مبسطة وشاملة ومتميزة لبعض النماذج الرياضية التي أصبحت مألوفة في اتخاذ القرارات التخطيطية والرقابية بمدياتها القصيرة والطويلة. فقد تناول أسلوب البرمجة الخطية ونماذجها، وعرض لمفاهيمها ودلالاتها والأسس الرياضية والجبرية التي تستند إليها، والمفاهيم والدلالات المرتبطة بالمعلومات الناتجة عن استخدامها، وحدودها وتحليل مدى حساسيتها، والتي تمثل في كليتها مرجعاً في البرمجة الخطية. ولقد تمت دراسة طريقة الرسم البياني، كأسلوب لحل مشاكل البرمجة الخطية. وأيضاً دراسة الطريقة الأكثر فعالية في حل مشاكل البرمجة الخطية وهي طريقة السيمبليكس وذلك من حيث خطواتها وتطبيقاتها المختلفة، وكذلك المواضيع المرتبطة بها، مثل تحليل الحساسية ومشكلة الازدواج. وتناول **الفصل الرابع** نموذج النقل واستخداماته في كيفية تحديد خطة النقل المثلى التي تحقق أدنى مستوى ممكن لتكاليف النقل الكلية. وفي **الفصل الخامس** عرض لشبكات الأعمال من حيث المفهوم والأساليب والاستخدامات مع التركيز على طريقة المسار الحرج وأسلوب "بيرت" والتكلفة. وكذلك تم استعراض طريقة أطول وأقصر مسار كأداتين لتقرير كثير من السياسات والخطط التنفيذية. وناقش **الفصل السادس** مشاكل الرقابة على المخزون. وتناول **الفصل السابع** مشكلة صفوف الانتظار، وذلك من حيث مفاهيمها وأسسها ونماذجها وعلاقتها بالتكاليف. بينما في **الفصل الثامن** تمت مناقشة نظرية المباريات وعلاقاتها بالمفاضلة بين القرارات الاستراتيجية المثلى.

ولعل هذا العرض، الهادف إلى توضيح دور العلوم الإدارية في المساهمة في اتخاذ القرارات الاقتصادية في ظل بيئة تتسم بالديناميكية في تقنيتها وسرعة حركتها وأهمية المعلومات فيها والحاجة الماسة إلى الأساليب والنماذج المساعدة لإمكانية معايشتها، قد حقق بهذه الصورة الغرض منه، وأهم من ذلك، لعله يفيد القارىء في ما يصبو إليه، والله أسأل التوفيق والسداد.

وبعد الاستعراض الموجز لمحتويات هذا الكتاب، أود أن أضع هذا العمل بين أيدي الباحثين. كما إنني على استعداد كامل لتقبل أية اقتراحات سواء كانت هذه الاقتراحات بالسلبية أو الإيجابية وذلك من أجل التحسين والرفع من هذا العمل. كما أنتهز هذه الفرصة لأقدم الشكر إلى الأساتذة المراجعين لهذا العمل، والمصحح من الناحية اللغوية، كما أشكر د. إبراهيم مسعود عيسى لمساعدته في الجانب المتعلق بنظرية

الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية لما لها من علاقة وثيقة بالنماذج الرياضية في مادة بحوث العمليات.

كذلك أقدم الشكر والاحترام إلى كل من ساهم في هذا العمل بطريقة مباشرة أو غير مباشرة والذين وضعوا اللمسات الأخيرة على هذا الكتاب سواء بطباعته أو تجليده أو تصميمه أو إخراجه على هذا النحو.

والله ولي التوفيق

المؤلف

د. سليمان محمد مرجان

2002

الفصل الأول

مفهوم وأهمية علم بحوث العمليات

The Nature and Importance of Operations Research science

لقد ظهر هذا العلم حديثاً وأعطيت له عدة أسماء مثل بحوث العمليات Operations Research، أو الطرق الكمية في الإدارة Quantitative Methods أو علم الإدارة Management Science أو تحليل النظم Systems Analysis. وكل هذه الأسماء تطلق على هذا العلم بعد الحرب العالمية الثانية والمستخدمة في المجالات المدنية. ويتم تحديد بعض التعاريف لهذا العلم على النحو التالي:

- بحوث العمليات هي إحدى الأدوات الكمية التي تساعد الإدارة في عملية اتخاذ القرارات.
- تدور بحوث العمليات حول استخدام التحليل الكمي لمساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات مع الاعتماد بالدرجة الأولى على الأساليب الرياضية المتقدمة.
- بحوث العمليات هي عبارة عن استخدام الطرق والأساليب والأدوات العلمية لحل المشاكل التي تتعلق بالعمليات الخاصة بأي نظام بغرض تقديم الحل الأمثل لهذه المشاكل للقائمين على إدارة هذا النظام.
- بحوث العمليات هي مجموعة من الأدوات القياسية التي تمكن الإدارة من الوصول إلى قرارات أكثر دقة وموضوعية وذلك بتقديم الأساس الكمي لتحليل البيانات والمعلومات.

من خلال ذلك فإن علم بحوث العمليات هو ذلك العلم الذي يهتم بدراسة مشكلة معينة من المشاكل. ولقد توسع هذا العلم وانتشر ليشمل قطاعات مختلفة حيث يستخدم في مجالات الإنتاج والتصنيع وتوزيع المواد ونقلها ومتابعة المشاريع وإيجاد الخطط الفعالة في تنفيذ المشروع بفترة زمنية أقل وبعدد أقل من العمال، ويوفر هذا العلم فوائد كثيرة لصانعي ومتخذي القرار ومن بين هذه الفوائد:

- طرح البدائل لحل مشكلة معينة لاتخاذ القرار المناسب، إعتماداً على العوامل والظروف المتوفرة.

- إعطاء صورة تأثير العالم الخارجي على الإستراتيجية المتبعة في تنفيذ خطة ما، حيث تؤثر الظروف الخارجية على نتيجة الاستراتيجيات التي تتخذها الإدارة، فمثلاً العرض والطلب هي من الظروف الخارجية التي تؤثر على إنتاج السلعة وتحقيق الأرباح من خلال إنتاجها.
- صياغة الأهداف والنتائج ومدى تأثير هذه الأهداف بكافة العوامل والمتغيرات رياضياً للوصول إلى كميات رقمية يسهل تحليلها.

ومن أهم المجالات التي يمكن استخدامها كالآتي:

1 ـ في المجالات الإدارية، حيث يوفر هذا العلم المعلومات اللازمة لاتخاذ القرار المناسب في الوقت المناسب.

2 ـ في مجال الإنتاج والتصنيع والبيع وبأقل تكلفة ممكنة وأقل فاقد ممكن وأعلى ربح.

3 ـ في مجال التوزيع والنقل وبأقل تكلفة.

4 ـ في مجالات التعيين وذلك باختيار الشخص المناسب للوظيفة الملائمة.

5 ـ في مجالات التخطيط من خلال متابعة المشاريع وإعداد الخطط الزمنية لتنفيذ المشاريع المختلفة.

خلاصة القول، يمكن أن نقول بأن بحوث العمليات تستخدم في جميع المجالات إذا توفرت المعلومات والشروط التي تنطبق على أحد نماذج بحوث العمليات.

التطور التاريخي لعلم بحوث العمليات:

يعتبر علم بحول العمليات من العلوم الحديثة حيث ظهر هذا العلم سنة 1936 في بريطانيا، ولكن البداية الحقيقية لهذا العلم كانت خلال الحرب العالمية الثانية. هذا ويمكن تصنيف مراحل التطور لعلم بحوث العمليات كما يلي:

التصنيف الأول ـ إستخدام علم بحوث العمليات في النواحي أو العمليات الحربية:

1 ـ إستخدامه في بريطانيا:

وهذه المرحلة تبدأ منذ بداية الحرب العالمية الثانية، عندما بدأت إدارة الحرب البريطانية بتشكيل فريق من العلماء برئاسة البروفيسور بلاكيت Blackett P.M.S. من جامعة مانشيستر Manchester لدراسة المشاكل الاستراتيجية والتكتيكية المتعلقة بالدفاعين الجوي والأرضي لبريطانيا. ولم تقتصر هذه الدراسات على الدفاع الجوي والأرضي فقط، بل امتدت الدراسات إلى البحرية البريطانية حيث أجريت دراسات تتعلق بالوقاية من الغواصات، وكذلك لدراسة حجم وترتيب قوافل السفن التجارية، ونوع وعدد السفن الحربية المرافقة، وشملت الدراسة تحديد أفضل الطرق لاستخدام قنابل الأعماق في مهاجمة هذه الغواصات. وقد وضع هدف استخدام الموارد البشرية والمادية بشكل أمثل

لإنتاج معدات وأجهزة دفاعية وفي أسرع وقت ممكن، بالإضافة إلى تحقيق أمثل استخدام للأجهزة والمعدات المصنعة. ولقد كانت النتائج التي حققها هذا الفريق هامة، كان من ضمنها تحسين منظومة الرادار وتحسين الدفاع المدني وغيرها.

2 ـ إستخدامه في أمريكا:

وكنتيجة للتقدم الهائل الذي أحرزته المجموعة البريطانية قامت إدارة الحرب الأمريكية بإجراء دراسات مماثلة وذلك بتكوين فريق خاص لمعالجة بعض المشاكل المعقدة كمشكلة نقل المعدات والمواد المختلفة وتوزيعها على الوحدات العسكرية المنتشرة في مناطق مختلفة من العالم. ولقد كان كل من جايمس James B رئيس لجنة بحوث الدفاع القومي وفانيفار Vannevar B رئيس لجنة الأسلحة والمعدات الجديدة وراء استخدام بحوث العمليات، وهما اللذان شاهدا استخدام هذا الأسلوب في القوات البريطانية، أثناء إقامتهما في بريطانيا خلال فترة الحرب. وفي أكتوبر 1942 بعث الجنرال سباتز Spaatz القائد العام للقوة الجوية الثامنة برسالة إلى القادة العموميين للقوات الجوية، يوصي فيها بوجوب ضم مجموعات من العلماء لتحليل العمليات في وحداتهم. ومن خلال ذلك، شكلت القوة الجوية الثامنة الموجودة في بريطانيا أول فريق لهذا الغرض، ثم تبعها السلاح البحري الأمريكي. فشكل فريقين لهذا الغرض في المشروعين التاليين: معمل المعدات البحرية وترأس هذا الفريق أليسا Ellisa J، الأسطول العاشر وترأس هذه المجموعة فيليب Philip M ونظراً للنجاح الذي تحقق في الولايات المتحدة الأمريكية بفضل استخدام علم بحوث العمليات، فقد واصل القادة العسكريون اهتمامهم بهذا العلم من خلال وكالة بحوث العمليات والتي تحولت في ما بعد إلى مؤسسة بحوث العمليات.

3 ـ إستخدامه في كندا:

بدأت الحكومة الكندية باهتمام بعلم بحوث العمليات فشكلت فريقاً مهمته إنتاج بعض المعدات العسكرية وذلك من خلال الاستخدام الأمثل للموارد المتوفرة.

التصنيف الثاني ـ إستخدام علم بحوث العمليات في النواحي أو المجالات المدنية:

بدأ هذا التصنيف بعد انتهاء الحرب العالمية الثانية نتيجة للنجاح الذي تحقق في المجالات العسكرية، فتشجع رجال الأعمال، الذين كانوا ـ هم الآخرون ـ يبحثون عن حلول لمشاكلهم المتعلقة بالعمل على إدخال هذا العلم في إدارة المشاريع الاقتصادية.

ففي بريطانيا قام فريق من المهتمين بهذا المجال، بتكوين نادي بحوث العمليات سنة 1948 والذي أصبح اسمه في ما بعد جمعية بحوث العمليات للمملكة المتحدة، والتي بدأت في إصدار مجلة علمية ربع سنوية، ابتداء من سنة 1950، التي تعد أول مجلة في هذا المجال.

بينما في الولايات المتحدة الأمريكية تم تكوين جمعية بحوث العمليات الأمريكية، ومعهد الإدارة العلمية في سنة 1950. وقد أصدرت هذه الجمعية مجلة بحوث العمليات

سنة 1952. كما أصدر المعهد أيضاً مجلة تخصصية في بحوث العمليات اسمها مجلة الإدارة العلمية وذلك في سنة 1953.

ولقد استخدم هذا العلم في المجالات المدنية نظراً لزيادة الإنتاج في السلع ومن أجل إيجاد أفضل السبل لإنتاج السلع وبأقل تكلفة ممكنة وتوزيعها بصورة أمثل. **والسؤال الذي يطرح نفسه هنا ـ ما هي استخدامات بحوث العمليات في الوقت الحالي؟** إن ظهور علم الحاسب الآلي في الفترة الحالية، والذي له الطاقة الكبيرة في إجراء العمليات الحسابية المختلفة وكذلك ظهور البرامج العلمية المتطورة للحساب والتي لها الأثر الواضح في دفع استخدام علم بحوث العمليات إلى آفاق واسعة في المجالات الإدارية وفي غيرها من العلوم، فيعتبر علم بحوث العمليات من الوسائل العلمية المساعدة في اتخاذ القرارات بأسلوب أكثر دقة وبعيد عن العشوائية الناتجة عن أسلوب التجربة والخطأ. فلقد قدم وما تزال يقدم خدمات هامة في حل المشاكل الإدارية واتخاذ القرارات فيما يتعلق بنشاط الإنتاج والمشتريات والتمويل، وما إلى ذلك من الأنشطة الأخرى.

وكل تلك التقنيات والمعارف الحديثة والمتطورة أدت إلى ضرورة استخدام البرمجة الخطية Linear Programming التي أدت إلى معالجة العديد من المشاكل الهامة وعلى نطاق واسع، مثل مشاكل التخصيص وتحديد كمية الإنتاج المناسبة في عدد من المصانع لتغذية عدد من الأسواق أو المخازن. وكذلك استخدام أسلوب نظرية صفوف الانتظار Queuing Lines Theory لتحليل شبكات خطوط الاتصالات والتي وجدت مجالها في تحليل خطوط الإنتاج وتنظيم مراكز الخدمة اللازمة على الخط الإنتاجي أو في مجال الصيانة، وغيرها من المجالات الصناعية الأخرى. وقد أمكن باستخدام صفوف الانتظار إيجاد نظم للمخزون تتناسب مع ظروف كل دالة وتقلل من درجة عدم التأكد. ومن الأدوات العلمية التي أضيفت إلى مجموعة الأدوات العلمية المستخدمة لاتخاذ القرارات الإدارية المتعلقة بالمجالات الصناعية هي طريقة المسار الحرج Critical Path Method (CPM) ويرجع أصلها إلى طريقة مماثلة قريبة الشبه منها هي طريقة تقييم ومراجعة المشروعات (PERT) Program Evaluation and Review Technique، ومن أهم المجالات التي تستخدم فيها طريقة بيرت PERT هي تخطيط ومراقبة المشروعات الإنشائية والصيانة والبحوث، وغيرها. ولم يقتصر استخدام الحاسبات الآلية في مجال بحوث العمليات الحسابية المعقدة، بل أمكن استخدام فكرة التمثيل أو المحاكاة Simulation من الحاسب الآلي في تمثيل نظم إنتاجية كاملة ومحاولة اختبار أكثر من قرار لاختيار أفضل القرارات بسبب النتائج التي يظهرها الحاسب الآلي.

أهم أساليب وأدوات بحوث العمليات:

يأخذ استخدام علم بحوث العمليات في حل المشاكل الإدارية شكلين أساسيين: 1

ـ إستخدام أساليب معروفة وعامة وذلك بتطويعها لظروف المشكلة محل الدراسة. 2 ـ إبتكار أسلوب خاص لمعالجة المشكلة إذا كانت من نوع فريد لا يصلح لها أي من الأساليب المعروفة. ومع استمرار التقدم والتطور في مجال بحوث العمليات، وجدت مجموعة من النماذج التي شاع استخدامها كأساليب قياسية لحل الكثير من المشاكل التي تواجه العديد من المشروعات القائمة، ومع زيادة دور هذه النماذج في معالجة الكثير من المشاكل الإدارية فقد تعددت مجالات استخدام هذه النماذج. وفي هذا العرض سوف نتناول بالدراسة المختصرة تصنيفاً لهذه النماذج المستخدمة وذلك في محاولة لتصنيف وتبويب الأساليب والأدوات الكمية المستخدمة كخريطة تحدد المسار الذي سوف نتبعه في وصف أهم هذه النماذج، وسوف يتم عرض أوسع لبعض هذه النماذج في الفصول القادمة. ونورد في ما يلي نبذة مختصرة عن عدد من الأساليب المعروفة لبحوث العمليات ومجال استخدامها هذا التبويب يمكن عرضه في الجدول (1 ـ 1):

جدول (1 ـ 1) تصنيف النماذج المستخدمة في بحوث العمليات

نماذج بحوث العمليات			
النماذج الاحتمالية Stochastic Models	النماذج المختلطة Hybrid Models	النماذج المحددة Deterministic	
البرمجة الاحتمالية Stochastic Program	البرمجة الديناميكية Dynamic Program	البرمجة الخطية Linear Programming	الطرق التقليدية Classical Methods
صفوف الانتظار Queuing Theory	نماذج المخزون Inventory Model	التوزيع والتخصيص Distribution and Assignment	
تحليل ماركوف Markov Analysis	أسلوب المحاكاة أو التمثيل Simulation	البرمجة العددية Integer Programming	طرق البحث Search Methodes
نظرية الألعاب والقرار Decision and Game Theory	تقييم ومراجعة المشروعات وطريقة المسار الحرج PERT-CPM	البرمجة الشبكية Networks Programming	البرمجة غير الخطية Nonlinear Programming
		برمجة الأهداف الخطية Goal programming	

يتضح من التبويب السابق أن النماذج المستخدمة في بحوث العمليات يمكن تصنيفها على أساس كونها محددة أو احتمالية، كما أن هناك نماذج أخرى يمكن اعتبارها خليطاً من النوعين السابقين. في النماذج المحددة يفترض دائماً أن قيم المتغيرات التي لا يمكن التحكم فيها وقيم المعاملات معروفة مسبقاً وثابتة وذلك على العكس من النماذج الإحتمالية ومعظم النماذج المحددة هي من النوع الذي يعتمد على الرموز الجبرية والذي

يرمي إلى تعظيم أو تقليل دالة هدف معينة، وذلك طبقاً لقيد ومحددات مفروضة. بالإضافة إلى ذلك يجب التفرقة بين نوعين من النماذج الرياضية وهي النماذج الرياضية الخطية وغير الخطية، حيث إن هذه التفرقة مبنية أساساً على نوع العلاقات الرياضية التي تحكم المتغيرات والقيود ودالة الهدف؛ فعلى سبيل المثال نجد أن نماذج البرمجة الخطية تفترض دائماً أن العلاقات والارتباطات التي تتضمنها القيود والدوال هي علاقات وارتباطات خطية في حين تفترض النماذج غير الخطية خلاف ذلك.

ونماذج **التوزيع والتخصيص** يمكن اعتبارها على أساس أنها حالات خاصة من النماذج الرياضية الخطية «البرمجة الخطية»، حيث تستخدم في معالجة مجموعة معينة وقسم خاص من المشاكل التي تتميز بتعدد أوجه النشاط التي تتنافس في ما بينها على مجموعة من الموارد المحددة، وهي تفترض أيضاً العلاقة الخطية. أما في ما يتعلق بالبرمجة العددية، فهي أسلوب لا يختلف عن البرمجة الخطية إلا في الطريقة المتبعة للحصول على الحل، حيث يتطلب أن تكون قيم متغيرات القرار أعداداً صحيحة أو قد تتضمن مشكلة البرمجة العددية عدداً من الحلول التي يجب أن تساوي فيها قيمة كل متغير صفراً أو واحداً. ومن أمثلة المشكلات التي يمكن استخدام البرمجة العددية في حلها: مشكلة اختيار موقع المشروع وتخطيط الإنتاج في ظل نظام الدفع الإنتاجي والتعامل مع القرارات التي تتضمن تكاليف ثابتة وتكاليف متغيرة والمفاضلة بين الموردين والمفاضلة بين المشروعات الاستثمارية عند التخطيط المالي وفي اتخاذ قرارات التوسع في الطاقات الإنتاجية.

ونماذج الشبكات **«البرمجة الشبكية»** عبارة عن أسلوب خاص للبرمجة الخطية يحاول في الغالب تمثيل الظاهرة محل الدراسة في شكل شبكة تدفق يمكن من خلالها تحديد جميع العلاقات والارتباطات التي تنطوي عليها الظاهرة محل الدراسة. أما برمجة الأهداف فيمكن وصفها باختصار بأنها تلك النماذج التي تعالج الدوال المتعددة في ظل عدد من القيود الخطية، وغالباً ما يستخدم هذا الأسلوب في مجال تخطيط القوى البشرية وفي الحالات التي تتطلب معالجتها تحقيق مستويات مرضية لعدد من الأهداف المتضاربة.

عند هذا الحد يجب أن نشير إلى أن كل النماذج الخطية يمكن استخراج حلولها باستخدام الأسلوب الرقمي الذي يطلق عليه في كثير من الحالات أسلوب المعاودة Iterative Procedure والذي يبدأ في العادة ببرنامج مبدئي، يتم تعديله ومراجعته طبقاً لقواعد وإجراءات محددة للوصول إلى برنامج ثان يمثل بديلاً آخر، حيث يتم تعديل هذا البرنامج الثاني للوصول إلى ثالث وهكذا. ومن أشهر الطرق المستخدمة في معالجة نماذج البرمجة الخطية ما يعرف بالطريقة العامة أو طريقة السيمبليكس The Simplex Method.

ونماذج **البرمجة غير الخطية** لا تفترض كما ذكرنا سلفاً العلاقات والارتباطات الخطية وهي مصنفة في التبويب السابق على أساس طرق وأساليب الحل بدلاً من البنية

الرياضية أو الإحصائية المستخدمة في إعداد النموذج. فالطرق التقليدية تستخدم حساب التفاضل Differential Calculus للوصول إلى البدائل المثلى، كما تستخدم إجراءات وطرقاً أخرى كطريقة الفرع والحد Branch and Bound.

والبرمجة الاحتمالية تعتمد على الاحتمالات في بناء النماذج الخاصة بها، حيث تفيد الاحتمالات في تخفيض حالة عدم التأكد بالاستناد إلى كمية المعلومات المتوافرة، وبالتالي فإن نماذج البرمجة الاحتمالية تعالج المعاملات على أساس كونها متغيرات عشوائية ولذلك فإن نماذج البرمجة الاحتمالية تمثل أحد جوانب البرمجة الرياضية التي لا تفترض التحديد المطلق.

أما **نماذج صفوف الانتظار** فهي تنفرد عن غيرها من النماذج من حيث مجال تطبيقاتها، فهي تحاول أساساً التنبؤ بخصائص العمليات لبعض الأنظمة التي تبدو فيها ظاهرة الانتظار واضحة، حيث تختص هذه النماذج لصفوف الانتظار بالوصول العشوائي للعملاء إلى مراكز الخدمة ذات الطاقة المحدودة، حيث ترمي في الغالب إلى تحديد العدد الأمثل من الأفراد أو مراكز الخدمة اللازمين لخدمة العملاء الذين يصلون عشوائياً ودون انتظام.

ونماذج **التحاليل الاحتمالية** كتحليل «ماركوف» هي الأخرى تحاول التنبؤ بسلوك نظام معين على أساس البيانات والمعلومات المتوفرة عن سلوك هذا النظام في الماضي، فعلى سبيل المثال يمكن استخدام هذه النماذج للتنبؤ بأنظمة «الماركات المختلفة» من السلعة في السوق في الفترات الزمنية المقبلة وذلك من خلال استخدام حساب المصفوفات.

ونظرية القرارات تعتبر أيضاً أحد المداخل المدروسة في اتخاذ القرارات في ظل عدم التأكد التام، وهذه النظرية تشتمل على أسس وعناصر مستمدة من نظرية المنفعة ونظرية الاحتمالات، حيث تفيد هذه النظرية في تخفيض المخاطر التي قد يتعرض لها متخذ القرار عندما يكون في حالة عدم التأكد، وليس بإمكانه التنبؤ بالمستقبل على أساس التأكد التام.

أما **نظرية المباريات** فترتبط غالباً بمجالات التضارب في المصالح بين المتنافسين، وتستخدم هذه النظرية الأساليب الرياضية والإحصائية للوصول إلى أفضل «استراتيجية» على أساس تعظيم المنافع والحد من الخسائر.

والبرمجة الديناميكية تعد أيضاً أسلوباً فريداً لمعالجة كثير من الظواهر والحالات التي تكون أبعادها والعلاقة بينها محددة أو احتمالية على حد سواء. وتقوم فكرة البرمجة الديناميكية على أساس المشكلة الأصلية إلى عدد من المشاكل الفرعية تعالج على أساس كونها جزءاً من الكل.

أما ما يعرف **بأسلوب مراجعة وتقييم المشروعات**، فهو يختص بتخطيط وجدولة ومتابعة تنفيذ المشروعات التي لا تتصف بالتكرار، وذلك تحقيقاً للاستخدام الأمثل للموارد المتاحة، حيث يدفع هذا الأسلوب الإدارة إلى التفكير المسبق في تفاصيل تخطيط وجدولة المشروعات قبل التنفيذ ومن خلاله تكشف نقاط الاختناق وتعمل على خفض الوقت والنفقات مع الانتهاء من التنفيذ في الوقت المحدد.

نماذج المخزون هي تلك النماذج التي تعالج مشاكل الرقابة على المخزون السلعي باستخدام التحليل الكمي للوصول إلى تحديد السياسات المثلى للتخزين والتي تحقق أقل التكاليف المتوقعة، حيث ترمي هذه النماذج إلى الإجابة عن الاستفسارات المتعلقة بالحجم الأمثل للطلبية والوقت الملائم لإعداد الطلبيات.

أما أسلوب المحاكاة فيساهم بدوره في تفادي إجراء التجارب على الواقع العملي وذلك بتصميم نماذج تماثل هذا الواقع وإجراء التجارب عليها للتنبؤ بالنتائج المحتملة لقرار معين قبل الالتزام به. ويستخدم أسلوب المحاكاة في حل مشكلات صفوف الانتظار وتحديد سياسة التخزين المثلى وتحديد السياسات السعرية ولاختبار الخطط الاستراتيجية.

وبالإضافة إلى هذه النماذج يمكن أن نضيف نماذج أخرى مثل **نماذج تحديد موقع المشروع** Location Models حيث تساعد هذه النماذج في تحديد المواقع المثلى للمشروعات على النحو الذي يخفض تكاليف إنشاء المشروعات وتكاليف نقل المواد الخام للمشروع ونقل السلع من المنشأة إلى الأسواق لأدنى حد ممكن. **أساليب التنبؤ الإحصائي** Forecasting Model وتستخدم هذه الأساليب بيانات تاريخية عن ظاهرة معينة وتحاول استخراج معادلة رياضية استناداً على هذه البيانات. يمكن استخدام هذه المعادلة للتنبؤ بسلوك الظاهرة وتستخدم هذه الأساليب في التنبؤ بالمبيعات والأسعار والإنتاج وحركة التجارة الخارجية والنمو السكاني وغيرها من الظواهر. **تحليل التعادل** Break-Even Analysis: ويستخدم هذا الأسلوب لتحليل العلاقات بين الإيرادات والتكاليف الثابتة والمتغيرة وحجم الإنتاج وذلك لتحديد مستويات الإنتاج التي يحقق عندها المشروع ربحاً أو خسارة أو التي يتوازن عندها مقدار الربح والخسارة، ويصلح استخدام هذا الأسلوب في حالة تحديد حجم الدفع الإنتاجية والمفاضلة بين التجهيزات الإنتاجية البديلة أو المفاضلة بين مواقع المشروعات.

يتضح مما سبق عرضه أن الطريقة العلمية باستخدام بحوث العمليات تقوم على بناء النماذج الرياضية، والتي بدورها تتيح لمتخذ القرار تبسيط الواقع بشكل يضمن الحصول على استنتاجات سليمة ترتكز على الأساس الكمي - تمهد الطريق لاتخاذ القرارات الإدارية السليمة - وهو أسلوب يحقق لمتخذ القرار فرصة إجراء التجارب قبل الإقدام على فعل معين قد تترتب عليه نتائج خطيرة.

أسئلة: Questions

س1 ـ عرّف بحوث العمليات. وما هي أهم المجالات التي يمكن أن تستخدم فيها بحوث العمليات؟

س2 ـ كيف تطور علم بحوث العمليات؟ وما هي التصنيفات المختلفة المتعلقة بهذا التطور؟ مع التركيز على استخدامات علم بحوث العمليات في الوقت الحالي.

س3 ـ أذكر أهم الأساليب والأدوات التي تستخدم في مجال بحوث العمليات، مع إعطاء فكرة مبسطة عن أهم النماذج المستخدمة لهذا العلم.

س4 ـ حدد بعض الاستخدامات لعلم بحوث العمليات في مجال الإدارة.

س5 ـ ما هي العلاقة التي تربط بين بحوث العمليات والحاسوب؟

س6 ـ ما هي العلاقة التي تربط علم بحوث العمليات بالعلوم الأخرى؟

الفصل الثاني

إتخاذ القرارات

Decision Making

المقدمة:

من المعروف بأن اتخاذ القرار هو جوهر ولب العملية الإدارية في أي مشروع، والقرار في حد ذاته هو اختيار حل من بين عدة حلول لمشكلة معينة، أو من بين سبل العمل المتاحة لتحقيق هدف معين. وعملية اتخاذ القرار هي مجموعة متتالية من الخطوات والإجراءات التي تؤدي في نهايتها إلى اختيار أفضل الحلول البديلة، وإصدار الأوامر الخاصة بتنفيذها. فمن الناحية الإدارية والعملية أيضاً يوجد فرق بين **اتخاذ القرار** (Decision Taking) **وصناعة القرار** (Decision Making)، وبالتالي فإن المفهوم لكل منهما يجب أن يكون واضحاً. وصناعة القرار هي الآن محور البحث العلمي لإصدار قرارات رشيدة ناتجة عن الصناعة. بمعنى أن لصناعة القرار مدخلات تقود إلى مخرجات، وهذا يعني دراسة مدخلات صناعة القرار ليكون رشيداً وقابلاً للتنفيذ ومتمشياً مع ظروف الإنتاج السائدة. أما اتخاذ القرار فهو اختيار أحد البدائل من البدائل المتاحة في الخصوص بغية اتخاذ القرار الأمثل من حيث تحقيق الهدف والموضوعية. فيمكن تصور عمليات صناعة القرار على أنها كيفية الحصول على المدخلات مثل الموارد المادية والبشرية، والآلات والمعدات، المواد الخام والإمكانيات الإنتاجية الآلية، والاستثمارات اللازمة لتشغيل النظام الإنتاجي بما يتفق مع احتياجات هذا النظام، وتحويل هذه المدخلات إلى سلعة لها المواصفات والقيمة الزمنية والمكانية المقررة للمنتج. ولتحقيق الهدف الذي يسعى المشروع لتحقيقه وهو إنتاج السلعة بأكبر كفاءة ممكنة ينبغي على إدارة المشروع الحصول على المدخلات التي تمكنه من تحقيق الإنتاج المطلوب بأقل تكلفة ممكنة.

يمكن الآن توضيح أهم القرارات التي تتخذها إدارة المشروع لصناعة القرار المتعلق بالعمليات الإنتاجية، والتي يمكن تحديدها في المجالات الرئيسية التي تعمل فيها هذه الإدارة، والتي تتعلق بتخطيط المنتج ويقصد به تحديد وتعريف المنتوج ذي القيمة الزمنية

والمكانية وبالمواصفات التي يحتاج إليها مستعمل هذا المنتوج. والمجال الثاني هو تحديد أنواع المدخلات اللازمة والحصول عليها ثم مجال تحويل هذه المدخلات وتحقيق الإنتاج المطلوب.

القرار الأول المرتبط بصناعة القرار هو دراسة السلعة التي يجب أن تنتج، فيهتم مدير إدارة العمليات الإنتاجية بأن يحقق المواصفات التي يطلبها مستعمل السلعة (المستهلك الأخير). ويمكن استخدام كلمة فاعلية (Effectiveness) الإنتاج للتعبير عن مدى النجاح الذي يحققه مدير الإنتاج في الوصول بالمنتوج إلى المواصفات التي يتطلبها المستهلك الأخير للسلعة. كما أن كفاءة (Efficiency) الإنتاج تعبر عن المستوى النسبي للتكلفة التي يتحقق الإنتاج بموجبها. ولذلك نجد أن هذا المدير يسعى للوصول إلى أعلى درجة من الكفاءة والفاعلية في المنتوج الذي يقدم للمستهلك الأخير. ولكي يصل مدير إدارة العمليات الإنتاجية إلى هذا الهدف يبدأ بتحديد شكل وطبيعة المنتوج أو الخصائص التي يجب أن يتميز بها حتى يلاقي إقبالاً لدى المستهلك الأخير والمتوقع.

القرار الثاني المتعلق بصناعة القرار هو تحديد أنواع المدخلات وتحويلها (الموارد المختلفة، الآلات والمعدات، المواد الأولية، وغيرها). بعد تحديد نوع وطبيعة السلعة ووضع المواصفات الفنية للإنتاج تتخذ إدارة العمليات الإنتاجية قرارات عمليات خلق المنتج ويتضمن ذلك تحديد أنواع المدخلات اللازمة وكيفية استخدامها.

القرار الثالث المرتبط بصناعة القرار هو تحديد مقومات خلق المنتج قبل الوصول إلى القرار الاقتصادي بمجموعة المدخلات التي تحقق أكبر كفاءة للمشروع يجب الانتهاء من اتخاذ القرار التقني (التكنولوجي) الذي يحدد البدائل الفنية التي يمكنها أداء العمل المطلوب.

القرار الرابع المرتبط بصناعة القرار هو تحديد الكمية المطلوبة من عناصر المدخلات. يتم اختيار المدخلات في مجموعات متكاملة، ويتخذ القرار التقني الذي يحدد البدائل الممكنة من الناحية الفنية قبل الشروع في اتخاذ القرار الاقتصادي.

القرار الخامس هو قرار تحديد القدرة الإنتاجية. ترتبط تكلفة الإنتاج لكل من البدائل المختلفة من مجموعات المدخلات بكمية الإنتاج. ومن المعروف أن التكلفة الكلية للإنتاج لا تتغير مباشرة مع تغير الكمية المنتجة.

القرار الأخير يتعلق بالتخطيط الزمني لعناصر المدخلات. لا تنتهي وظيفة الإنتاج عند تحديد المنتج وتحديد أنواع المدخلات اللازمة للعملية الإنتاجية، بل تتضمن الوظيفة قراراً يتعلق بعنصر الزمن.

من خلال هذا المنطلق يمكن أن نحدد **الخطوات أو المراحل التي يجب أن يتبعها متخذ القرار** (المدير) عندما يرغب في اتخاذ قرار معين وهي:

1 ـ تحديد طبيعة المشكلة أو الهدف المراد تحقيقه:

تحديد طبيعة المشكلة يعتبر بمثابة تحديد الطريق الذي يجب أن يسير عليه متخذ القرار، وهو أمر في غاية الأهمية حيث يمكن إذا تعمقنا في جوانب المشكلة أن نكتشف نواحي من الأفضل أخذها بعين الاعتبار أثناء عملية اتخاذ القرار. ومع هذا فيجب أن نتعرف على الظروف المحيطة بالمشكلة وذلك بسبب اختلاف الظروف التي ربما تؤدي إلى اختلاف القرار. وبناء على ذلك يمكن تقسيم المشاكل حسب التصنيف التالي:

أ ـ مشاكل روتينية ـ وهي المشاكل التي تتكرر.

ب ـ مشاكل حيوية ـ وهي المتعلقة بالخطط والسياسات المتبعة في المشروع.

جـ ـ مشاكل طارئة ـ هي التي تحدث دون وجود مؤشرات على حدوثها، ويعتمد علاجها على قدرة المدير في اتخاذ قراره بسرعة وحزم.

2 ـ تحديد البدائل (وضع المشكلة في صورة بدائل):

ما نود التركيز عليه في هذه الخطوة هو أنه من النادر وجود بديل واحد لأية مشكلة (عمل)، لذلك لا بد من وجود عدة أدلة أو براهين لأي عمل ويتم تحديدها تحديداً قاطعاً عن طريق البحث العلمي المنظم.

3 ـ تحليل وتقييم كل بديل:

يتم تحليل وتقييم البدائل بواسطة تحديد المتغيرات التي يمكن قياسها بسهولة كالإيرادات، التكاليف، الزمن، درجة الصعوبة وغيرها، ومحاولة وضع التخمين الدقيق لحد ما عن العناصر الأخرى، مثلاً العلاقات العمالية أو الظروف السياسية التي لا يمكن وضعها بصورة كمية.

4 ـ إختيار البديل الأمثل من البدائل وإصدار القرار:

من الطبيعي أنه يتم اختيار البديل الأمثل من خلال ثلاثة منطلقات وهي: **الخبرة، التجربة، البحث والتحليل**. والمنطلق الأخير هو الأسلوب الأكثر استخداماً وتأثيراً بتحليل المشكلة واكتشاف العلاقات بين المتغيرات المهمة وكذلك القيود التي لها علاقة بالهدف الذي تسعى إلى تحقيقه.

5 ـ تنفيذ القرار ومتابعته وتقييمه:

حيث نجد أنه لا تنتهي مهمة متخذ القرار عند تنفيذه بل تتعدى إلى متابعة نتائج التنفيذ وذلك للتعرف على مدى نجاح البديل المختار أو الأمثل في علاج المشكلة أو تحقيق الهدف المرغوب. ومما تجدر الإشارة إليه في هذا الصدد هو أنه يمكن تقسيم الحالات (المناخ أو الظروف) التي تتخذ فيها مختلف أنواع القرارات إلى ثلاث حالات أساسية وهي:

أ ـ حالة التأكد التام:

وهي تتمثل في مجموعة من الظروف أو المتغيرات أو الحقائق التي تدفع متخذ القرار إلى الاعتماد التام بأن حالة ما من الحالات المتوقعة سوف تحدث وعلى وجه التأكيد، ومن ثم فإن مهمة متخذ القرار في هذه الحالة هي اختيار البديل الذي يحقق أكبر عائد ممكن في ظل هذه الحالة المؤكد وقوعها.

ب ـ حالة المخاطرة:

في كثير من الأحيان، يحدد متخذ القرار عدداً من الحالات أو الأحداث المتوقع حدوثها في المستقبل وكذلك احتمالات حدوث كل حالة من هذه الحالات أو الأحداث، وغالباً ما يتم تحديد احتمالات وقوع هذه الأحداث بأحد الأسلوبين:

أولاً: الاحتمالات الموضوعية ـ أي التي يتم حسابها على أساس تحليل البيانات التاريخية المتاحة أو المتجمعة من سنوات سابقة وعلى أساس أن ما حدث في الماضي قد يتم حدوثه في المستقبل.

ثانياً: الاحتمالات التقديرية ـ هذه يتم تحديدها على أساس الخبرة والتقدير الشخصي واستطلاع آراء الخبراء والمتخصصين. والمعايير المستخدمة في كلتا الحالتين تسمى بالاحتمالات التقديرية أو معيار ما يطلق عليه بالقيمة المتوقعة.

جـ ـ حالة عدم التأكد:

في هذه الحالة لا يمكن لمتخذ القرار أن يحدد احتمالات حدوث كل حالة من الحالات المتوقعة حتى ولو أمكنه تحديد تلك الحالات فعلاً. وبناء على ذلك لا يوجد معيار واحد متفق عليه كأساس لاتخاذ القرار، ولكن يتوقف الاختيار من بينها على شخصية متخذ القرار نفسه ودرجة استعداده لتحمل المخاطر.

ومن خلال مختلف الظروف لعملية اتخاذ القرار، فإن متخذ القرار عندما يرغب في تنفيذ هذا القرار فإنه يلجأ إلى استخدام العناصر البشرية لتنفيذه، وهذا يتوقف على نوعية القرار الذي يرغب باتخاذه، ففي بعض الأحيان يلجأ إلى استخدام الأدوات الكمية المختلفة (بحوث العمليات، الإحصاء، الرياضيات، الحاسب الآلي، نظم المعلومات الإدارية الخ) لمساعدته في عملية تنفيذ هذا القرار، وكذلك قبل تنفيذ هذا القرار عليه أن يقوم بدراسة ومتابعة التطورات البيئية المختلفة (المباشرة، وغير المباشرة)، والتي تؤثر على عملية اتخاذ القرار. الجدول التالي (1 ـ 2) يبين ذلك:

جدول (1 ـ 2)
الإدارة وعملية اتخاذ القرار

الموارد البشرية	الأدوات الكمية	البيئة	
		البيئة الداخلية	البيئة الخارجية
(العلوم السلوكية، إدارة الأفراد أو إدارة الموارد البشرية، السلوك التنظيمي وغيرها)	(الحاسب الآلي، علم الإدارة أو بحوث العمليات، الإحصاء، نظم المعلومات الإدارية، الرياضيات وغيرها)	ـ الوظائف الإدارية ـ الإجـــــــــــراءات والسياسات الداخلية ـ الضوء والضوضاء ـ وغيرها	ـ العوامل السياسية ـ العوامل الاقتصادية ـ العوامل الاجتماعية والثقافية ـ العوامل التقنية

إن الجدول (1 ـ 2) يشير إلى الحقائق التالية وهي:

1 ـ هناك حاجة ماسة ومتزايدة لاستخدام علم الإدارة والإحصاء والأدوات التحليلية الكمية كأدوات مساعدة لمتخذ القرار حيث يمكن للمدير الاستفادة من التسهيلات المتاحة في علم الإدارة والإحصاء والأساليب الرياضية، وخاصة بعد ظهور الحاسبات الآلية وظهور برامج كمبيوتر جاهزة للاستخدام دون الحاجة إلى الإلمام بالنواحي الفنية المتخصصة في مجال تشغيل الحاسبات أو إعداد البرامج.

2 ـ العلوم السلوكية ـ لقد أصبحت تحتل أهمية خاصة في معالجة العديد من المشاكل الإدارية ومن ثم أصبح مطلوباً من المدير الإلمام بمبادىء هذا العلم وذلك لأن المعرفة المتحصل عليها من هذه العلوم تمكن من مساعدته في إيجاد الحلول المناسبة لعدد لا يستهان به من المشاكل الإنتاجية والإدارية.

3 ـ إن معظم القرارات الإدارية ترتبط بشكل مباشر أو غير مباشر بمشاكل إنسانية للأفراد، ولهذا فإن الأساليب الرياضية بمفردها لا تمثل أساساً صالحاً لاتخاذ القرارات ما لم تكن مدعومة بالخبرة والتقدير الشخصي للمدير.

4 ـ القدرة على التنبؤ والمعرفة التامة بالمؤثرات البيئية المختلفة.

وبناء على ذلك يستطيع متخذ القرار أن يطبق الأسلوب الكمي في اتخاذ القرار على الأمور التي يمكن تطبيقها. ولعله من البديهيات أنه لا يمكننا وضع قائمة شاملة بالأساليب التي تصلح لمعالجة كل المشاكل المتعلقة بالإنتاج والعمليات. ولكن مع استمرار التقدم والتطور في مجال علم الإدارة والعلوم الأخرى وجدت مجموعة من النماذج التي شاع استخدامها كأساليب قياسية لحل الكثير من المشاكل التي تواجه العديد من المشروعات القائمة، ومع زيادة دور هذه النماذج في معالجة الكثير من المشاكل الإدارية فقد تعددت مجالات استخدام هذه النماذج. وخلاصة القول، يمكن أن نكتفي بالإشارة إلى بعض

النماذج التي يمكن الاستعانة بها في اتخاذ القرارات المتعلقة بعلم الإدارة. والمثال (1) يبين بعض النماذج المستخدمة لحل بعض المشاكل الإدارية بصورة عامة:

نفرض أن الشركة العامة للنقل البحري ترغب في شراء سفن جديدة، وذلك لغرض توسيع وتحسين مجال خدماتها. ولكن هذه الشركة لم تقرر بعد ما هي النوعية اللازمة من هذه السفن التي يجب شراؤها. وبعد دراسة السوق العالمي، تبين لها بأنه يوجد ثلاثة أنواع من السفن التي يمكن الاختيار من بينها والتي تتلائم مع متطلبات هذه الشركة (وجود قرارات بديلة لعملية المفاضلة) وهي:

البديل الأول ـ شراء سفن من الحجم الصغير (S)

البديل الثاني ـ شراء سفن من الحجم المتوسط (M)

البديل الثالث ـ شراء سفن من الحجم الكبير (L)

ولقد كانت توقعات إدارة الشركة بالنسبة لمبيعات السنة القادمة من التذاكر (الأحداث المستقبلية) وهي كالتالي:

المجموعة الأولى (A1) ـ (0 ـ 100000 دينار)

المجموعة الثانية (A2) ـ (100000 ـ 180000 دينار)

المجموعة الثالثة (A3) ـ (180000 ـ 300000 دينار)

المجموعة الرابعة (A4) ـ (أكثر من 300000 دينار)

ولقد قامت إدارة الشركة بتحديد الأرباح المتوقعة وهي مبنية في الجدول (2 ـ 2):

جدول (2 ـ 2) الأرباح المتوقعة

القرارت البديلة		الأحداث أو النتائج المتوقعة	
L	M	S	
LA1	MA1	SA1	A1 (0-100000)
LA2	MA2	SA2	A2 (100000-180000)
LA3	MA3	SA3	A3 (180000-300000)
LA4	MA4	SA4	A4 (300000 -)

من الجدول (2 ـ 2) يتبين أن الرموز الموجودة على يمين الجدول (SA1, MA1, LA1,....LA4) تمثل الأرباح التي يمكن تحقيقها، نتيجة لاتخاذ قرار من القرارات المذكورة والمتبوعة بحدث من الأحداث المتوقعة، مثلاً (SA1) توضح الربح الذي يمكن تحقيقه، وذلك إذا اشترت الشركة سفناً من النوع الصغير (S)، وكان حجم المبيعات في المجموعة الأولى (0 ـ 100000) دينار. كما أن (LA4) تعني الربح الذي سيتحقق، وذلك

إذا اشترت الشركة سفناً من النوع الكبير (L)، وكان حجم المبيعات في المجموعة الرابعة (أكثر من 300000) دينار.

نفرض أن هذه الشركة احتسبت قيمة الأرباح، والتي كانت مبينة في الجدول (3 ـ 2).

جدول (3 ـ 2) الأرباح

نوع السفينة	المبيعات			
	A1	A2	A3	A4
S	40,000	22,000	30,000	50,000
M	35,000	45,000	25,000	20,000
L	-40,000	-10,000	45,000	60,000

نلاحظ من الجدول (3 ـ 2) بأن القيم السالبة (40000 ـ) و(10000 ـ) تمثل الخسارة. فمثلاً إذا قررت الشركة شراء السفن من النوع الكبير (L)، وفي نفس الوقت كان حجم المبيعات في المجموعة الأولى (0 ـ 100000) دينار، فإن الخسارة التي سوف تتكبدها هذه الشركة هي (40000) دينار. وبالمثل بالنسبة للرقم الثاني، بمعنى أنه إذا تقرر شراء سفن من النوع الكبير (L)، وفي نفس الوقت كان حجم المبيعات في المجموعة الثانية (100000 ـ 180000) دينار، فإن الخسارة ستكون عشرة آلاف دينار.

جدول الخسائر

من خلال المعلومات السابقة يمكن بناء جدول يهتم بالخسائر، وذلك عن طريق تحديد أكبر قيمة في كل عمود من الأعمدة المكونة لجدول الأرباح، ثم نقوم بطرح بقية القيم من تلك القيمة الكبيرة، ويكون الفرق ممثلاً لما يسمى بخسارة الفرصة الضائعة (Opportunity Loss). وحساب هذه الخسائر مبين في الجدول (4 ـ 2).

جدول (4 ـ 2) الخسائر

العمود الأول	العمود الثاني	العمود الثالث	العمود الرابع
40,000-40,000 = 0	45,000-22,000 = 23,000	45,000-30,000 = 15,000	60,000-50,000 = 10,000
40,000-35,000 = 5000	45,000-45,000 = 0	45,000-25,000 = 20,000	60,000-20,000 = 40,000
40,000-(-40,000) = 80,000	45,000-(-10,000) = 55,000	45,000-45,000 = 0	60,000-60,000 = 0

ويكون جدول الخسائر بعد إجراء العمليات الحسابية اللازمة لذلك في الجدول (4 ـ 2)، ملخصة في الجدول (5 ـ 2):

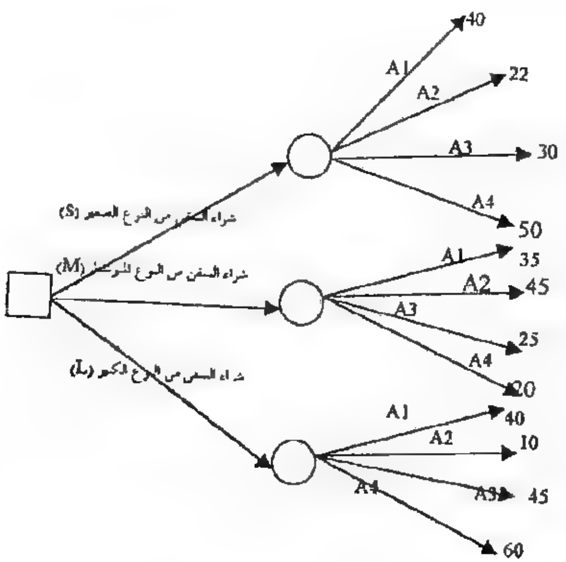
جدول (5 ـ 2) ملخص للخسائر

نوع السفينة	المبيعات			
	A1	A2	A3	A4
S	0	23,000	15,000	10,000
M	5,000	0	20,000	40,000
L	80,000	55,000	0	0

شجرة القرارات Decision Tree:

تستخدم شجرة القرارات في تحليل المشاكل المعقدة وخاصة عندما تكون المشكلة متعلقة بعنصر المخاطرة وعدم التأكد. وتفيد شجرة القرارات عند المفاضلة بين البدائل الاستثمارية وعند شراء المعدات وإجراء التعاقدات. فمن خلال المعلومات الموجودة في المثال السابق (1) يمكن تحليل البدائل المختلفة كما هي مبينة في شجرة القرارات المبينة في الشكل (1 ـ 2):

شكل (2ـ1) شجرة القرارات



لقد ناقشنا سابقاً الظروف المختلفة التي تتخذ فيها القرارات، وذكرنا بأنها تنقسم إلى ثلاثة ظروف مختلفة وهي:

أولاً ـ إتخاذ القرارات تحت حالة التأكد التام Making Decision Under Certainty:

في هذه الحالة يكون متخذ القرار متأكداً من أن حدثاً معيناً سوف يقع، أي أنه يكون على علم تام بالمستقبل. وفي هذه الحالة يكون من السهل على متخذ القرار تحديد القرار البديل الذي سيتخذه. فإذا افترضنا مثلاً أن إدارة الشركة العامة للنقل البحري متأكدة من أن حجم المبيعات سيكون (0 ـ 100000) دينار، فإن القرار سوف يكون شراء سفينة من نوع صغير (S)، لأن ذلك سيحقق أعلى عائد، وهو (40000) دينار. أما إذا كانت الإدارة متأكدة من أن حجم المبيعات، سيكون (180000 ـ 300000) دينار، فإن القرار سيكون شراء سفينة من النوع الكبير (L)، وذلك لأن هذا القرار سيحقق أيضاً أعلى ربح، وهو (45000) دينار. لاحظ أيضاً أن هذين القرارين يحققان أقل الخسائر (أنظر جدول الخسائر).

ثانياً ـ إتخاذ القرارات تحت حالة عدم التأكد Making Decisons Under Uncertainty:

في هذه الحالة، متخذ القرار يكون غير متأكد من أن هناك حدثاً بعينه سوف يحدث، وإضافة إلى ذلك، فإنه لا توجد معلومات وافية تمكن من تحديد احتمالات وقوع الأحداث الممكنة، وفي هذه الحالة، فإن متخذ القرار يمكنه اللجوء إلى إحدى الطرق التالية عندما يرغب إتخاذ قرار معين يتعلق بهذه الظروف.

أ ـ طريقة تعظيم أكبر عائد يمكن تحقيقه Maximax:

متخذ القرار يجب عليه أن يستخدم الخطوتين التاليتين وهما:

1 ـ من جدول الأرباح، يتم تحديد أكبر ربح يمكن تحقيقه من كل القرارات البديلة.

2 ـ يتم اختيار أكبر قيمة من بين القيم التي تم تحديدها في الخطوة (1)، ويكون القرار الذي يحقق هذه القيمة هو القرار الذي يجب اتخاذه. نستنتج أن هذه الطريقة تركز على تعظيم أكبر ربح يمكن تحقيقه، ولذلك تسمى في بعض الأحيان (طريقة القرار المتفائل). ووفقاً لهذه الطريقة، فإن أكبر ربح يمكن تحقيقه في المثال السابق هو (60000) دينار، والذي يتحقق عن طريق شراء السفن من النوع الكبير (L).

ب ـ طريقة تعظيم أقل عائد يمكن تحقيقه Maximin:

يمر متخذ القرار أيضاً بخطوتين اثنتين وهما:

1 ـ من جدول الأرباح، يتم تحديد أقل ربح يمكن تحقيقه من كل القرارات البديلة.

2 ـ يتم اختيار أكبر قيمة من بين القيم التي تم تحديدها في الخطوة (1)، ويجب اتخاذ القرار الذي يحقق هذه القيمة. وهكذا، فإن هذه الطريقة هي عكس الأولى، تركز

على تعظيم أقل ربح يمكن تحقيقه، ولذلك، فإن البعض يسميها (طريقة القرار المتشائم). وفي المثال السابق نجد أن أكبر عائد من بين أقل الأرباح المترتبة على مختلف القرارات هو الربح (22000) دينار، والذي يعني أن القرار الذي يجب اتخاذه هو شراء السفن من النوع الصغير (S).

جـ ـ طريقة تقليل أكبر خسارة يمكن تكبدها Minimax:

هناك خطوتان يجب أن نتبعهما وهما:

1 ـ من جدول الخسائر، يتم تحديد أكبر خسارة يمكن تكبدها من كل القرارات البديلة.

2 ـ يتم اختيار أقل قيمة من بين القيم التي تم تحديدها في الخطوة (1)، ويجب اتخاذ القرار الذي يحقق هذه القيمة. وبتطبيق هذه الطريقة، فإن الخسارة هي (23000) دينار، والتي تعني أن القرار الذي يجب اتخاذه هو شراء السفن من النوع المتوسط (M). وتعرف هذه الطريقة بطريقة (الأسف أو الندم).

ثالثاً ـ إتخاذ القرارات في حالة المخاطرة أو المجازفة:

تحت هذه الظروف، فإن متخذ القرار يكون بحاجة لمعلومات عن احتمالات وقوع الأحداث المختلفة التي تلي الاختيارات المختلفة للقرارات. وهذه الاحتمالات قد يتم الحصول عليها من السجلات الماضية للمشروع، وقد تكون مجرد تقدير شخصي لمتخذ القرار نفسه، وفي هذه الحالة، يمكن لمتخذ القرار اللجوء إلى إحدى الطرق التالية عندما يرغب باتخاذ قرار معين تحت هذه الظروف. والطرق هي:

I ـ طريقة القيمة المتوقعة The Expected Value Method:

الإجراءات التي يجب اتباعها عند استخدام هذه الطريقة هي:

1 ـ إحسب الربح المتوقع من قرار بديل، وذلك بوزن أو تقييم كل ربح من الأرباح الموجودة في الصف الذي يشير إلى القرار، وذلك بضربها في احتمالات وقوع الأحداث المختلفة، ثم تجميع القيم الناتجة.

2 ـ قم باختيار القرار الذي يعطي أكبر عائد متوقع فإذا افترضنا مثلاً أن احتمالات بيع الأحجام المختلفة السابقة من المبيعات كانت كالآتي:

إحتمال أن يكون حجم المبيعات (0 ـ 100000) = 15%

إحتمال أن يكون حجم المبيعات (100000 ـ 180000) = 30%

إحتمال أن يكون حجم المبيعات (180000 ـ 300000) = 25%

إحتمال أن يكون حجم المبيعات (300000 ـ) = 10%

وترغب هذه الشركة تحديد أعلى الأرباح المتوقعة، ومن ثم تحديد القرار الذي

يجب اتخاذه، فإن ذلك يتم تحديده كما يلي:

يكون الربح عند شراء السفينة من النوع الصغير (S):

40000 (%15) + 22000 (%30) + 30000 (%25) + 50000 (%10) = 25100 دينار.

يكون الربح عند شراء السفينة من النوع المتوسط (M):

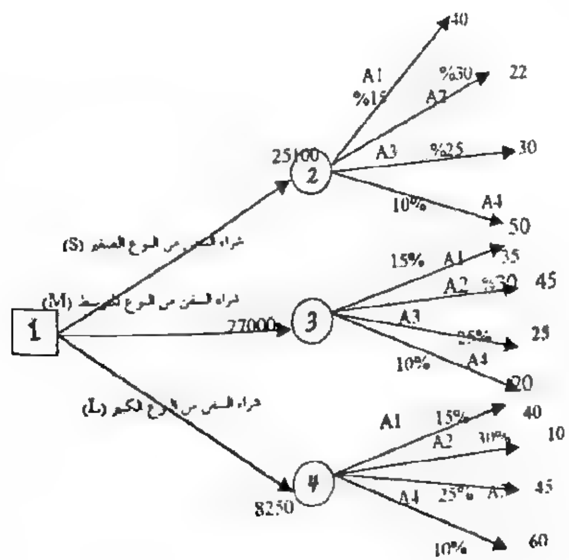
35000 (%15) + 45000 (%30) + 25000 (%25) + 20000 (%10) = 27000 دينار

يكون الربح عند شراء السفينة من النوع المتوسط (M):

(ـ 40000) (%15) + (ـ 10000) (%30) + 45000 (%25) + 60000 (%10) = 8250 ديناراً

من خلال هذه النتائج، فإن أكبر قيمة متوقعة هي (27000) دينار، والتي تتحقق عندما يكون القرار هو شراء سفينة من النوع المتوسط (M)، ويمكن توضيح هذه المعلومات مباشرة في الشكل (2 ـ 2)، على شجرة القرارت كما يلي:

شكل (2 ـ 2) شجرة القرارات مرفقة بالاحتمالات لكل قرار



ويمكن أيضاً الوصول إلى نفس القرار السابق، إذا أخذنا جدول الخسائر السابق، فتكون النتائج كالآتي:

الخسارة عند شراء سفينة من النوع الصغير (S):

0 (%15) + 23000 (%30) + 15000 (%25) + 10000 (%10) = 11.65 ديناراً

الخسارة عند شراء سفينة من النوع المتوسط (M):

5000 (%15) + 0 (%30) + 20000 (%25) + 40000 (%10) = 9.75 ديناراً

الخسارة عند شراء سفينة من النوع الكبير (L):

80000 (%15) + 55000 (%30) + 0 (%25) + 0 (%10) = 28.5 ديناراً

من خلال هذه النتائج، نجد أن أقل الخسائر تتحقق بشراء السفينة من النوع المتوسط (M)، وهي نفس النتيجة السابقة، ويمكن جمع الأرباح والخسائر المتوقعة في جدول واحد، وذلك من أجل المقارنة كما هو في الجدول (6 ـ 2):

جدول (6 ـ 2) الأرباح والخسائر المتوقعة من المثال (1)

	شراء سفينة من النوع الصغير (S)	شراء سفينة من النوع المتوسط (M)	شراء سفينة من النوع الكبير (L)
الأرباح المتوقعة	25100	27000	8250
الخسائر المتوقعة	11.65	9.75	28.5

القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة Expected Value of Perfect Information :

لو فرضنا أنه في بعض الحالات، كانت هناك إمكانية الحصول على معلومات مؤكدة من أحد المصادر بخصوص أي الأحداث سوف تقع، ونرغب في تحديد قيمة هذه المعلومات الكاملة، فإذا كانت احتمالات الأحجام لأربعة للمبيعات هي كما سبق: 15% للحجم الأول، 30% للحجم الثاني، 25% للحجم الثالث، 10% للحجم الرابع. فإذا فرضنا أن هذه الأحجام تبين الواقع العملي فعلاً، فإن القرارات التي يجب اتخاذها في هذه الحالات الأربع هي:

إذا كان حجم المبيعات (0 ـ 100000) دينار، فإن نوع السفينة المشتراة هي من الحجم الصغير (S)، والعائد 40000 دينار.

إذا كان حجم المبيعات (100000 ـ 180000) دينار، فإن نوع السفينة المشتراة هو من الحجم المتوسط (M)، والعائد 45000 دينار.

إذا كان حجم المبيعات (180000 ـ 300000) دينار، فإن نوع السفينة المشتراة هو من الحجم الكبير (L) والعائد 45000 دينار.

إذا كان حجم المبيعات (أكثر من 300000) دينار، فإن نوع السفينة المشتراة هو من الحجم الكبير (L) والعائد 60000 دينار.

وبالتالي يكون الربح المتوقع عند استخدام مصدر المعلومات الكاملة هو:

40000 (15%) + 45000 (30%) + 45000 (25%) + 60000 (10%) = 36.750 ديناراً.

وبدون استخدام هذه المعلومات الكاملة، فإن الربح المتوقع هو فقط 27000 دينار (أنظر شكل 2 ـ 1)، ومن ثم، فإن القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة تساوي (27.000 ـ 36.750) = 9750 ديناراً. وبشكل عام، يمكن تحديد الخطوات التي تتحدد بها القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة كالآتي:

1 ـ يتم تحديد أعلى ربح من كل حدث، على اعتبار أن هناك علماً مؤكداً بأن ذلك الحدث سوف يقع.

2 ـ يتم وزن كل ربح من هذه العوائد، وذلك بضربها في احتمالات وقوع الأحداث.

3 ـ تجمع القيم المحسوبة في الفقرة (2)، وتسمى القيمة الناتجة الربح المتوقع في وجود معلومات كاملة.

4 ـ يتم تحديد القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة، وذلك بطرح القيمة المتوقعة في حالة عدم وجود معلومات كاملة، والمحسوبة في الفقرة (3).

وعلى متخذ القرار أن يقارن بين تكلفة الحصول على هذه المعلومات المؤكدة، وما يضيفه وجودها من عوائد، ومن ثم يقرر استخدامها من عدمه.

II ـ طريقة السبب غير الكافي Insufficient Reason Method:

في وقوع الأحداث، مثلاً، قد لا تتوفر لإدارة الشركة العامة للنقل البحري معلومات عن احتمالات بيع الأحجام المذكورة من المبيعات. ونظراً لأن هناك أربعة أحجام مختلفة من المبيعات، فإن متخذ القرار، وبإتباع هذه الطريقة، يمكنه اعتبار أن احتمال بيع أي حجم من هذه الأحجام هو 25%، ويتم حساب القيمة وفقاً لهذه الطريقة كما يلي:

الربح عند شراء السفينة من النوع الصغير (S):

40000 (25%) + 22000 (25%) + 30000 (25%) + 50000 (25%) = 35.5 ديناراً.

الربح عند شراء السفينة من النوع المتوسط (M):

35000 (25%) + 45000 (25%) + 25000 (25%) + 20000 (25%) = 31.25 ديناراً.

الربح عند شراء السفينة من النوع الكبير (L):

(ـ 40000) (25%) + (ـ 10000) (25%) + 45000 (25%) + 60000 (25%) = 10 دنانير.

من خلال هذه النتائج، نجد أن القرار الذي يجب اتخاذه هو شراء السفينة من النوع الصغير (S)، لأن هذا القرار يحقق أعلى ربح وقدره (35.500) ديناراً.

III ـ طريقة أكبر احتمال The Maximum Likelihood Method:

يمكن استخدام هذه الطريقة عن طريق اختيار الحدث الذي يكون احتمال وقوعه أكبر ما يمكن، ثم يتم اختيار التوفيق بين هذا الحدث والقرار الذي يعطي أكبر ربح ممكن. ففي المثال السابق نجد أن الحدث الذي يحمل أكبر احتمال وقوع هو الحدث (A2)، والذي يعني أن يكون حجم المبيعات (100000 ـ 180000) دينار. وعند النظر إلى الأرباح الموجودة في العمود الذي يقع تحت (A2) ـ انظر الجدول (3 ـ 2) ـ نلاحظ أن أكبر ربح هو 45.000 دينار، حيث إن هذا الربح يقابل (M) فهذا يعني أن القرار الذي يجب اتخاذه، هو شراء السفينة من النوع (M).

تحظى عملية اتخاذ القرارات الإدارية من خلال استخدام أسلوب علم الإدارة (بحوث العمليات) في الوقت الحاضر باهتمام كثير من الدارسين والمهتمين والممارسين للإدارة. فالدارسون للعلوم الإدارية يجدون في هذا المجال أسلوباً حديثاً ومتطوراً في تحليل البيانات تحليلاً كمياً يساير حركة الإدارة في الاتجاه العلمي.

أما الممارسون للأعمال الإدارية فإن اهتمامهم باستخدام هذا الأسلوب الجديد في اتخاذ القرارات الإدارية أصبح يتزايد باستمرار. وذلك برغبتهم في الاستفادة من هذه العلوم المتطورة، نظراً لما يعطيه من إمكانيات وقدرات أكبر في مجال التحليل وإنجازات لا يمكن التغاضي عنها في وقت أصبحت فيه الحاجة ماسة إلى هذه القدرات والإمكانيات. وعلى الرغم من أن هذا الأسلوب الكمي المتطور لا يصف في كثير من الحالات العوامل السلوكية المتعددة على وجه الدقة، وإنه يضع قواعد وإجراءات يمكن أن تفيد كثيراً في وضع الحلول المثلى، خاصة في المشروعات الكبيرة والتي تتميز عملياتها الإدارية في عصرنا الحاضر بالتعقد والتشابك إلى الحد الذي يجعل من اتخاذ القرارات مشكلة تتطلب الكثير من البيانات النوعية والكمية. بالإضافة إلى استخدام الأدوات والأساليب القياسية التي تسهم في تحليل هذه البيانات بغية الوصول إلى الحلول المثلى.

ومن الطبيعي الآن إمكانية تحديد المدخل الكمي في اتخاذ القرارات من خلال استخدام نماذج بحوث العمليات. وهذه الخطوات يمكن تصنيفها على النحو التالي:

أولاً ـ الشعور بضرورة اتخاذ موقف معين تجاه ظاهرة تحتاج إلى تفسير (الإدراك بضرورة التحرك في اتجاه معين لتصحيح وضع قائم).

ثانياً ـ تحديد إطار المشكلة ثم تحديد الأسلوب الذي يجب اتباعه لتقييم حل للمشكلة.

ثالثاً ـ بناء النموذج الرياضي الذي يمثل المشكلة أو الظاهرة محل الدراسة أو البحث (ترجمة العلاقة بين جميع المتغيرات المتعلقة مباشرة بالمشكلة محل الدراسة وتفريغها في قالب رياضي).

رابعاً ـ تجميع وتبويب وتحليل البيانات والمعلومات المتعلقة بالمشكلة.

خامساً ـ إستخراج واشتقاق الحل من النموذج.

سادساً ـ إختبار النموذج والنتائج المتحصل عليها لضمان صلاحية وصحة وواقعية النموذج المقترح.

سابعاً ـ تفسير النتائج المتحصل عنها.

ثامناً ـ إتخاذ القرار، ثم التنفيذ والمتابعة.

هذه الإجراءات المتتالية توضح الإطار الفكري العام للمدخل الكمي الذي يجب الاسترشاد به في اتخاذ القرارات الإدارية وتنفيذها. عند هذا الحد أود أن أوضح أن هذه البنية الجديدة في اتخاذ القرارات يجب ألا ينظر إليها على أساس أنها خطوات أو إجراءات متلاحقة، بل على العكس من ذلك فإن التراجع والتداخل بين هذه الخطوات، باستخدام أسلوب التغذية العكسية Feed back أو العملية التصحيحية يجب أن يكون متوقعاً عند دراسة كثير من الظواهر والحالات.

هذه البنية العلمية الجديدة تبين الأسلوب الذي يجب اتباعه لزيادة العوائد التي تعود على المنظمة وذلك بمحاولة الإجابة عن استفسارات أساسية وهامة، كإيجاد البديل أو الحل الأمثل من بين مجموعة من البدائل بناء على نتائج كل بديل في شكل كمي، الخ.

النماذج الرياضية وأنواعها:

يعرف النموذج الرياضي بأنه هو عرض مبسط للواقع. ويعتبر النموذج محاولة لتمثيل الواقع حيث يتم إعداده وبناؤه بغرض تفسير هذا الواقع من أجل فهمه وتصوره. وبناء على ذلك فإنه يمكن اعتبار النماذج الرياضية على أساس كونها تلك البنية التي تحدد العلاقة رياضياً بين ما يسمى بالمدخلات (المتغيرات، القيود، المعاملات) والمخرجات (قيم دالة الهدف). وبناء النماذج الرياضية هو عصب بحوث العمليات. يوجد العديد من الأنواع الأساسية للنماذج منها طبيعية وقصصية وتخطيطية ورياضية، ونهتم هنا بالنماذج الرياضية فقط. ويمكن تقسيم النماذج الرياضية كالآتي:

1 ـ النماذج الساكنة (الاستاتيكية) Static Model:

ويمثل هذا النموذج الكينونة التي يعد لها النموذج عند نقطة زمنية معينة. وتقرير

موازنة المشروع هو أحد الأمثلة حيث إنه يبين الظروف المالية في وقت محدد مثل انتهاء الأعمال للسنة في نهاية السنة المالية.

2 ـ النماذج الحركية (الديناميكية) Dynamic Model:

ويمثل هذا النموذج الكينونة التي يعد لها النموذج خلال فترة زمنية معينة مثلاً (سنة). وعلى أية حال فإن كشف حساب العائد للمشروع عبارة عن نموذج حركي.

3 ـ نماذج الحصول على الحل الأمثل Optimizing Model:

ويحدد هذا النموذج أفضل حل وحيد للمشكلة.

4 ـ نموذج عدم الحصول على الحل الأمثل Nonoptimizing Model:

هذا النموذج الذي يعطي مخرجات نشاط محدد وليس من اللازم أن يكون أفضل المخرجات.

وهناك تقسيم آخر يهتم بدرجة التأكد والتي يمكن أن تحدد بها عناصر النموذج أو أجزاؤه وهو كالآتي:

A ـ النموذج المحدد Deterministic Model:

وهو النموذج الذي تعرف كل العناصر فيه بأنها تعمل بطريقة محددة. أي بمعنى آخر نفترض في هذا النموذج دائماً أن قيم المتغيرات التي لا يمكن التحكم فيها وقيم المعاملات معروفة مسبقاً وثابتة، ومعظمها تعتمد على الرموز الجبرية والذي يرمي إلى تعظيم أو تقليل دالة هدف معينة وذلك طبقاً لقيود ومحددات مفروضة. نموذج كمية الطلب الاقتصادي Economic Order Quantity (EOQ) هو مثال جيد لهذا النوع. فتحسب كمية الطلب الاقتصادية بالصيغة التالية:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2DF}{CR}}$$

ويوجد من النموذج ثلاثة عناصر فقط أو ثلاثة متغيرات فقط. تمثل F تكلفة الاستحواذ أو تكلفة إعداد طلب الشراء مثل 20 ديناراً للأمر الواحد. وتمثل D كمية المبيعات السنوية لعنصر المخزون، افرض أنها 1000 وحدة. وتمثل CR تكلفة حفظ العنصر في المخزون ولتكن 0.16 ديناراً لكل وحدة في السنة. وهذه الأرقام هي أرقام يمكن إدخالها في النموذج لحساب أن حجم الطلب الاقتصادي هو 500 وحدة.

$$EOQ = \sqrt{\frac{2 \times 20 \times 1000}{0.16}} = \sqrt{250000} = 500$$

ولا توجد هناك أية إجابة أخرى، فالمتغيرات تتقاطع دائماً بنفس الطريقة.

B ـ النموذج الاحتمالي Probabilistic Model:

وفي هذا النموذج الاحتمالي لا يمكن التنبؤ فيه بسلوك المتغيرات تنبؤاً دقيقاً.

وتستخدم في هذا النموذج الصيغة إحتمالات حدوث الأشياء. ويستخدم المتنبئون بالأحوال الجوية هذا الاتجاه عندما يقولون على سبيل المثال إنه هناك احتمال 30% لهطول الأمطار. ويعبر عن الاحتمالات بنسبة مئوية. فإذا ما كنت متأكداً 100% من حدوث شيء معين فإن احتمال حدوثه هو 1.00 أما إذا كنت متأكداً 100% من عدم حدوث شيء فإن احتمال حدوثه هو (0). وبالإضافة إلى ذلك يجب التفرقة بين نوعين من النماذج الرياضية وهي:

1 ـ النماذج الرياضية الخطية.

2 ـ النماذج الرياضية غير الخطية.

حيث إن هذه التفرقة مبنية أساساً على نوع العلاقة الرياضية التي تحكم المتغيرات أو القيود ودالة الهدف. فنجد أن نماذج البرمجة الخطية تفترض دائماً أن العلاقات والارتباطات التي تتضمنها القيود والدوال هي علاقات وارتباطات خطية في حين تفترض النماذج غير الخطية خلاف ذلك.

أسئلة Questions

س1 ـ ما هو الفرق بين صناعة القرار وعملية اتخاذ القرار؟

س2 ـ حدد أهم القرارات التي يتخذها المشروع لصناعة القرار المتعلق بالعمليات الإنتاجية مع الشرح كل ما أمكن ذلك.

س3 ـ أذكر مع التوضيح للخطوات أو المراحل التي يجب أن يتبعها متخذ القرار، عندما يرغب في اتخاذ قرار معين.

س4 ـ المسؤول الإداري عندما يرغب في اتخاذ قرار معين، يجب عليه أن يتعرف على ثلاثة عناصر أساسية وهي العنصر البشري والأدوات الكمية والبيئة، كيف يتم ذلك؟ ولماذا؟

س5 ـ عرّف النموذج الرياضي وما هي الأنواع المختلفة لهذه النماذج؟

س6 ـ لماذا نقوم بدراسة الاحتمالات في هذه المادة؟ مع إعطاء فكرة مبسطة لبعض من هذه النماذج الاحتمالية.

تمارين:

س1 ـ نفرض أن مشروعاً معيناً يرغب في اتخاذ قرار يتعلق بزيادة حجم الإنتاج في السنة المقبلة كنتيجة لازدياد حجم الطلب المتوقع على المنتج النهائي. ومن خلال تحليل ودراسة الطاقة الإنتاجية الحالية تبين أن الزيادة في حجم الإنتاج لا يمكن أن تتحقق في ظل الإمكانيات والموارد المادية والبشرية المتاحة حالياً وأن السبيل الوحيد لزيادة الإنتاج يمكن أن يتحقق بأحد البديلين إما:

أ ـ شراء آلة جديدة لرفع مستوى الطاقة الإنتاجية الحالية.

ب ـ زيادة عدد ساعات العمل في المشروع.

تبين أيضاً من خلال الدراسات والأبحاث التي أجريت على السوق، أن هناك فرصتين متوقعتين فيما يتعلق بتسويق هذه السلعة وهما:

- أن حجم المبيعات قد يرتفع بنسبة 25% عن العام الماضي.
- أن حجم المبيعات قد ينخفض بنسبة 5% عن العام الماضي.

وقد كانت الاحتمالات المصاحبة لهذا الفرض هي 70%، 30% على التوالي، أي بمعنى آخر زيادة المبيعات بنسبة 70%، واحتمال انخفاض المبيعات بنسبة

30%. وبالإضافة إلى ما ذكر أعلاه، تبين أيضاً أن ارتفاع حجم المبيعات بنسبة 25% يحقق تدفقاً نقدياً يقدر بحوالي 400000 دينار في حالة شراء آلة إضافية، 350000 دينار في حالة زيادة عدد ساعات العمل، ولكن في حالة انخفاض مستوى المبيعات بنسبة 5% فإن التدفق النقدي ينخفض إلى 200000 دينار في حالة شراء الآلة الإضافية وإلى 300000 دينار في حالة تطبيق مبدأ العمل الإضافي.

المطلوب: تحديد البديل الأمثل وذلك عن طريق استخدام أسلوب نموذج القرارات.

س2 ـ محل لبيع منتجات الحليب ومشتقاته يرغب في تحديد كميات الحليب التي ينبغي شراؤها للأسبوع القادم، وهو غير متأكد من حجم المبيعات التي يمكن تصريفها خلال ذلك الأسبوع، ومن خلال الخبرة في هذا العمل التي اكتسبها من خلال السنوات السابقة تبين له العلاقات التالية والتي هي توافيق بين الكميات المباعة والكميات المشتراة، والربح المتحقق عند كل توافق منها بالدنانير.

حجم المبيعات خلال أسبوع/ علب	شراء عدد 2000 علبة	شراء 3000 علبة	شراء عدد 4000 علبة
2000	500	250	150
3000	500	750	500
4000	500	750	1000

المطلوب

1 ـ بواسطة استخدام قاعدة تعظيم أكبر ربح يمكن تحقيقه، ما هي الكميات التي يجب على هذا المحل شراؤها، وذلك في الأسبوع القادم؟

2 ـ ما الكميات التي يجب على المحل شراؤها وذلك إذا استخدم قاعدة تعظيم أقل عائد يمكن تحقيقه؟

س3 ـ إذا كانت المعلومات المبينة في الجدول التالي والتي تبين مبيعات الكتب العلمية لإحدى المكتبات وذلك خلال المدة السابقة.

عدد الكتب المباعة	التكرار/ بالأيام	احتمال التكرار	الاحتمالات المتجمعة
200	12	12	1.00
400	32	32	0.90
600	60	60	0.60
800	10	10	0.10

مع العلم بأن تكلفة شراء الكتاب الواحد بقيمة 6 دنانير وبأن سعر البيع بقيمة 8 دنانير.

المطلوب:

1 ـ ما هو عدد الكتب التي يتم شراؤها يومياً، وذلك لتعظيم الأرباح المتوقعة؟

2 ـ ما القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة لهذه المكتبة؟

3 ـ ما هي الأرباح المتوقعة في اليوم، إذا كانت المكتبة تحتفظ بمخزون من الكتب قدره 100 كتاب؟

س4 ـ القوات المسلحة لإحدى الدول لها استراتيجية للهجوم على منطقة معينة وذلك لغرض تحريرها. هذا الهجوم يصنف إلى ثلاثة مستويات (خفيف، متوسط، عنيف). وقد تم تصنيف فعاليات العدو بالمنطقة من الآليات إلى أربعة مستويات (0، 1، 2، 3). الجدول التالي يبين الأرباح المقاصة بعدد الوحدات التي سيتم تدميرها.

نوعية الهجوم	مستوى فعاليات العدو			
	0	1	2	3
خفيف	12	22	32	52
متوسط	22	32	36	46
عنيف	16	26	42	62

المطلوب:

1 ـ تحديد الاستراتيجية التي تعظم أقل عائد يمكن تحقيقه؟

2 ـ تحديد الاستراتيجية التي تعظم أكبر عائد يمكن تحقيقه؟

س5 ـ شركة النقل العام للركاب حددت الخسارة لعدد من التوافيق بين الحافلة التي ترغب شراءها، وعدد الركاب المتوقعين في السنة القادمة، وهذه مبينة في الجدول التالي:

نوعية الهجوم	مستوى عدد الركاب خلال السنة القادمة			
	(0 ـ 1000)	(1000 ـ 1500)	(1500 ـ 2000)	(أكثر من 2000)
صغير	200	300	300	100
متوسط	280	200	0	150
كبير	700	90	100	0

المطلوب: تحديد الخطة الشرائية التي يجب على الشركة اتباعها، وذلك بتطبيق قاعدة تقليل أكبر خسارة يمكن تكبدها.

الفصل الثالث

البرمجة الخطية

Linear Programming

■ المقدمة Introduction:

بدأت تطبيقات البرمجة الخطية في مجال اتخاذ القرارات أثناء الحرب العالمية الثانية حينما بدأ البريطانيون استخدامها في توزيع الطائرات وحاملات القنابل على المواقع المعادية، وقد تطورت البرمجة الخطية بسرعة كبيرة من ذلك الحين وبدأ استخدامها في العديد من المشاكل التي تواجه الإدارة في العمليات الحربية، وكذلك في عمليات إدارة الأعمال وفي الإدارة الحكومية (العامة). ويرجع الفضل لجورج دانتزج George B. Dantzig في اكتشاف الطريقة المنتظمة لحل مجموعة من المشاكل التي تتوافر فيها شروط البرمجة الخطية. فقد نشر أول بحث عنها في الولايات المتحدة الأمريكية سنة 1947. وعرفت هذه الطريقة المنتظمة من ذلك الحين بطريقة السيمبليكس Simplex Method. وحيث إن هذه الطريقة تقوم على تكرار تطبيق مجموعة محددة من القواعد حتى يتم التوصل إلى حل المشكلة موضوع التطبيق، فقد أصبحت سهلة التطبيق على الحاسبات الآلية. وقد أدى ذلك إلى إمكان تطبيقها على عدد كبير من المشاكل الإدارية التي تنطوي على عدد كبير جداً من المتغيرات.

البرمجة الخطية: هي إحدى الأساليب التي تستخدم في علم بحوث العمليات، وهي طريقة رياضية تمكن من التوصل لأفضل أو أمثل الحلول الممكنة لمجموعة من المشاكل التي تتوافر فيها شروط رياضية معينة. فنجد أن كلمة «**البرمجة**» تشير إلى الطريقة الرياضية المنتظمة التي يتم على أساسها التوصل إلى الحل الأمثل للمشكلة موضوع التطبيق من بين كل الحلول المتاحة والممكنة. بينما نجد كلمة «**خطية**» تشير إلى الشروط الواجب توافرها في المشكلة موضوع التطبيق حتى يتسنى حلها بالبرمجة الخطية. وهذه الكلمة مستخدمة لوصف العلاقة بين متغيرين أو أكثر، وهي علاقة مباشرة وتتغير بنفس النسبة.

استخدامات البرمجة الخطية:

أصبحت البرمجة الخطية من الأساليب الكمية الواسعة التطبيق في مجالات البحث العلمي والنظري ولحل المشاكل العلمية في مجالات مختلفة مثل الصناعة والزراعة والنقل والمواصلات، وفي حل المشاكل الاقتصادية والهندسية وغيرها. وتطبق البرمجة الخطية بنجاح في مجالات تخطيط وجدولة الإنتاج الصناعي واختيار نسبة مزج المدخلات، وفي تخطيط وجدولة الإنتاج الزراعي وتحديد المواصفات المثالية للأعلاف، وفي الإقلال من الفاقد والعادم، وفي تخطيط وجدولة النقل بشتى الطرق، وذلك بالإضافة إلى العديد من التطبيقات العسكرية والتخطيط الاقتصادي على المستوى القومي بصفة عامة، وغيرها.

وفي ما يتعلق بتطبيق البرمجة الخطية في مجال إدارة الأعمال، نستطيع أن نقول بأن أوجه التطبيق عديدة لا حصر لها تقريباً، وكل يوم يحمل إلينا تطبيقاً جديداً للبرمجة الخطية على إحدى المشاكل الإدارية أو الاقتصادية. إن تطبيق البرامج الخطية على المشاكل التي نواجهها يتطلب خيالاً خصباً وقدرة على تكوين المعادلات الجبرية كترجمة لوقائع الشروط والمشاكل التي نحاول إيجاد حل لها في الحياة العملية. وتعد البرمجة الخطية من أولى مواضيع بحوث العمليات التي استعملت واكتسبت شهرة واسعة في مجالات التطبيق الإدارية والاقتصادية. فمشكلة توزيع المواد النادرة تحت شروط وافتراضات معينة مشكلة تتعرض لها إدارة الأعمال كل يوم تقريباً في المجالات الوظيفية المختلفة، سواء كان هذا في إدارة التمويل أو إدارة الإنتاج أو إدارة الأفراد أو التسويق. وإضافة إلى النتائج الواضحة والمحددة التي نصل إليها في البرمجة الخطية ـ وهي بالتأكيد أكثر دقة من استعمال الطريقة التخمينية والقدرات الفردية في محاولة حل المشاكل ـ يمكننا الحصول على الفوائد التالية للإدارة:

1 ـ تقوم البرمجة الخطية بدور ملحوظ في المساعدة على تحليل المشاكل التي تتميز بعدد كبير من المتغيرات والشروط.

2 ـ تساعد البرمجة الخطية في إرغام الإدارة والمحللين على تحليل التكاليف والإيرادات الخاصة بكل مورد من الموارد المراد توزيعها على البدائل المختلفة. كذلك يمكن للإدارة عن طريق تحليل الحساسية Sensitivity Analysis وتغيير قيمة بعض المتغيرات أو بعض الشروط والمقيدات أو بعض أرقام التكاليف والإيرادات معرفة مدى تأثير ذلك على قرارات التوزيع والقرارات الإدارية المختلفة، وعلى هذا يمكننا تقدير وتقييم احتمالات الخطأ في التكوين الرياضي للمشكلة وتأثر هذا التكوين على النتائج والأرباح أو التكاليف.

خلاصة القول، يمكن أن نقول بأن البرمجة الخطية تستخدم في جميع المجالات المختلفة في حالة توافر المعلومات والبيانات المتفقة مع الشروط الأساسية لهذا النموذج.

الشروط الأساسية التي يجب توافرها عند استخدام أو تطبيق أسلوب البرمجة الخطية:

البرمجة الخطية ـ مثلها في ذلك مثل أي من أساليب ونماذج التحليل الكمية الأخرى ـ لا تصلح للاستخدام في حل كل المشكلات الإدارية، وإنما هي محددة بتوافر شروط تطبيقها. والشروط هي على النحو الآتي:

1 ـ يجب أن يكون هناك هدف واضح ومحدد تحديداً دقيقاً ويمكن صياغته في صيغة رياضية صريحة. وهذا الهدف إما أن يكون:

أ ـ البحث عن أعلى ربح ممكن (القيمة العظمى Maximization Value)

ب ـ البحث عن أقل تكلفة ممكنة (القيمة الصغرى Minimization Value).

2 ـ يجب أن تعكس الصيغة الرياضية للهدف المراد تحقيقه علاقة خطية متجانسة من الدرجة الأولى. وأن تكون هناك بدائل مختلفة للوصول إلى الهدف.

3 ـ يجب أن تكون الموارد المتاحة لدى المشروع محدودة ويمكن استخدامها بطرق متعددة.

4 ـ يجب أن يتوافر لدى المشكلة عدد من البدائل التي يمكن من خلالها الوصول إلى الهدف، ولا يمكن إيجاد الحل الأمثل بواسطة استخدام الطرق التقليدية. فإذا كانت المشكلة ذات حل أوحد فلا داعي لاستخدام أي أسلوب لحلها حيث لا توجد بدائل للمفاضلة والاختيار من بينها.

5 ـ يجب أن تكون العلاقة بين الموارد المتاحة والمحدودة ومتغيرات الهدف المراد تحقيقه علاقات خطية متجانسة من الدرجة الأولى، وقابلة للصياغة في صورة معادلات رياضية صريحة.

6 ـ يجب أن تتوفر المقاييس الكمية الدقيقة والمؤكدة لعناصر المشكلة.

الآن قبل الحديث عن الخطوات الأساسية التي يجب اتباعها عند تكوين أو بناء مشكلة البرمجة الخطية، يجب إعطاء فكرة مبسطة عن بعض المصطلحات العامة التي تستخدم عند استعمال أسلوب البرمجة الخطية.

توضيح بعض المصطلحات العامة المستخدمة للبرمجة الخطية:

القيمة الصغرى Minimization Value: وهي تعني بأن المشروع يسعى إلى تخفيض التكاليف إلى أقل تكلفة ممكنة.

القيمة العظمى Maximization Value: وهي تعني بأن المشروع يبحث في تحقيق أعلى ربح ممكن.

منطقة الحلول العملية The Feasible Solution Region: تتحدد هذه المنطقة في مشكلة البرمجة الخطية على أساس الناتج الصافي من جميع الشروط والمقيدات الموجودة في المشكلة والتي يجب أن يستوفيها أي حل نفرضه.

الحل العملي: يعرف بأنه أي حل يستوفي جميع الشروط والمقيدات الموجودة في التكوين النهائي للمشكلة.

الحلول غير العملية: هي الحلول التي لا تتقيد بشرط أو أكثر من الشروط المفروضة.

الحلول الأساسية The Basic Solutions: تتمثل في أي حل تكون فيه عدد المتغيرات الإيجابية (فوق الصفر) مساوية لعدد الشروط الموجودة في المشكلة، سواء كانت المتغيرات الإيجابية من المتغيرات الأساسية أو من المتغيرات الإضافية. والواقع أن الحلول الأساسية هي حلول ركنية Corner Solution بمعنى أنها تمثل حلولاً تقع في الأركان الموجودة في منطقة الحلول العملية.

الحل الأمثل: هو الحل الذي نختاره من بين عدد من الحلول أو المقترحات أو البدائل أو الخطط التي يمكن وضعها بحيث يشترط أن يحقق بها الحل الأمثل للنموذج الرياضي الشروط الموضوعية للمسألة والهدف من حلها، وقد يكون هذا الحل حلاً وحيداً أو قد نحصل في بعض الأحيان على أكثر من حل يحقق القيمة العظمى للتابع الهدفي.

- **الخطوات الأساسية التي يجب اتباعها عند تكوين مشكلة البرمجة الخطية:**

أولاً ـ تحديد طبيعة المشكلة (تحديد الهدف) Determining the Nature of the Problem:

وهي تتعلق بكيفية الوصول إلى أقصى الإيرادات (الأرباح) أو أقل تكلفة (المصروفات) ممكنة وربما أيضاً أقل الخسائر الممكنة وكذلك ما هي الإيرادات والمصروفات المتعلقة بالمشكلة. في هذه الخطوة يمكن أن نتساءل مثلاً: أين توجد المشكلة؟ ما هو سبب المشكلة؟ هل هذا هو السبب الحقيقي؟

ثانياً ـ تحديد المتغيرات التي تؤثر على هذه المشكلة Determining The Variables:

وهي تلك المتغيرات الموجودة في مشكلة البرمجة الخطية والتي تؤثر على الإيرادات والتكاليف وذلك حسب تغيرها. ومن خلال هذه المتغيرات نحاول تغييرها حتى نتمكن من الوصول إلى الحل الأمثل. وهذه المتغيرات تتمثل في المنتجات التي يمكن إنتاجها وبيعها، أو عوامل الإنتاج التي يمكن أن تقدم بنسب مختلفة لإنتاج سلعة أو منتجات محددة ومعروفة مثلاً:

عدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى = x

عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية = y

ثالثاً ـ تحديد دالة الهدف Determining The Objective Function:

بعد أن نحدد عدد المتغيرات في مشكلة معينة، علينا أن نتساءل ما هو تأثير المتغيرات والقيم المختلفة على دالة الهدف؟ ففي حالة ما يكون الهدف هو البحث على القيمة العظمى (الأرباح) للمشكلة فعلينا أن نتساءل أو نتعرف على ما هو تأثير هذه التغيرات على الأرباح؟ فيجب دراسة هذه العلاقات وتحديدها لأنها هي التي بدورها تحدد دالة الهدف Objective Function، وهذه الدالة تعتبر هي المحور الأساسي لتحليل المشكلة لإيجاد الحل الأمثل. ففي بعض الحالات نجد أن دالة الهدف تتكون من مجموعة من الخطوط المتوازية تتغير تبعاً لتغير القيمة في المتغيرات الموجودة في المشكلة.

رابعاً ـ تحديد الحدود والمقيدات في المشكلة والتعبير عنها في شكل متباينات Determining Constraints:

وضع القيود اللازمة على المتغيرات وعرض هذه القيود بشكل معادلات قابلة للحل، وذلك لأن الموارد التي قد تتوفر تمتاز بأنها محدودة القيمة.

خامساً ـ التكوين النهائي للمشكلة Final Formulation:

قبل البدء في إيجاد الحل الأمثل لهذه المشكلة فمن المستحب وضع ملخص لها، وضع المشكلة في صورة معادلات رياضية خطية ويتكون الشكل الرياضي العام لمسائل البرمجة الخطية. وهذه العلاقات الرياضية يجب أن تكون على النحو التالي:

1 ـ معادلة دالة الهدف (عظمى Max أو صغرى، Min).

2 ـ مجموع المعادلات الخطية المفروضة التي تبين شروط ومقيدات المسألة.

3 ـ شرط عدم السلبية **Nonnegativity Constraint**. وفي هذه الحالة يجب وضع المتغيرات المفروضة بأنها تساوي أو أكبر من الصفر (أي أنها تكون صفراً أو قيماً موجبة). لأنه من غير المنطقي أن نقول بأن إنتاج مصنع معين من السلعة يكون بالسالب.

سادساً ـ إستخدام إحدى الطرق للبرمجة الخطية وهي على النحو الآتي:

1 ـ طريقة التحليل البياني Graphical Method.

2 ـ طريقة السيمبليكس Simplex Method.

تكوين أو بناء المشكلة على صورة معادلات رياضية Formulating the Problem:

I ـ تكوين المشكلة في حالة القيمة العظمى:

- **مثال (1)**: سوف نأخذ المثال التالي لتوضيح الخطوات الأساسية للبرمجة الخطية:

نفرض أن هناك مشروعاً يقوم بإنتاج نوعين (نمطين) من المنتجات ولتكن الدراجات العادية والدراجات النارية. ويتم إنتاج كل من السلعتين على مرحلتين إنتاجيتين: المرحلة الأولى آلية حيث يتم تصنيع الأجزاء الرئيسية لكل من السلعتين. والمرحلة الثانية يدوية حيث يتم تجهيز وضبط وتشطيب وتجميع وتعبئة كل من السلعتين. لنفرض أيضاً أن الطاقة المحدودة والمتاحة في المرحلة الآلية تبلغ 12 ساعة/عمل. بينما تبلغ الطاقة المحدودة والمتاحة في المرحلة اليدوية 16 ساعة/عمل. وتباع الوحدة الواحدة من الدراجات العادية بمبلغ 25 ديناراً، بينما تباع الوحدة الواحدة من الدراجات النارية بمبلغ 50 ديناراً. وتبلغ التكلفة المتغيرة للوحدة من الدراجات العادية من مواد وأجور ومصاريف صناعية متغيرة 15 ديناراً. بينما تبلغ هذه التكاليف في الدراجات النارية 20 ديناراً. وتحتاج الوحدة الواحدة من الدراجات العادية إلى 4 ساعات من طاقة المرحلة الآلية و8 ساعات من طاقة المرحلة اليدوية. بينما تحتاج الوحدة من الدراجات النارية إلى 6 ساعات من طاقة المرحلة الآلية و4 ساعات من طاقة المرحلة اليدوية. هذا وترغب إدارة المشروع أن تتخذ القرار بحيث تتعرف على أفضل تشكيلة إنتاجية تؤدي إلى تعظيم أرباح الفترة التكاليفية.

• **المطلوب**:

1 ـ وضع هذه المشكلة في صورة معادلات رياضية (التكوين النهائي للمشكلة).

2 ـ تحديد المزيج السلعي من السلعتين الذي يحقق أقصى ربح ممكن وذلك في حدود الطاقة المحدودة والمتاحة بقسمي الإنتاج.

3 ـ إيجاد عدد الساعات غير المستغلة وفي أية مرحلة إن وجدت.

4 ـ ما هو القرار الأمثل الذي يجب اتخاذه إذا تغيرت أرباح السلعتين كأن يصبح المشروع يحقق ربحاً قدره 30 ديناراً عن الدراجة العادية و10 دنانير عن الدراجة النارية (إختبار الحساسية)؟

• **الحل**

المعلومات المتوفرة في المثال (1) يمكن تلخيصها في الجدول (1 ـ 3)

جدول (1 ـ 3) ملخص لمعلومات المشكلة

	المرحلة الآلية	المرحلة اليدوية	سعر بيع الوحدة	التكلفة المتغيرة للوحدة
السلعة الأولى (الدراجات العادية)	4 ساعات	8 ساعات	25 ديناراً	15 ديناراً
السلعة الثانية (الدراجات النارية)	6 ساعات	4 ساعات	50 ديناراً	20 ديناراً
الطاقة الإنتاجية المتاحة	12 ساعة	16 ساعة		

وتنحصر العوامل المؤثرة في حل هذه المشكلة البسيطة في ما يلي:

• سعر البيع لكل من السلعتين والتكلفة المتغيرة.

• الطاقة المحدودة والمتاحة في كل من المرحلتين.

• احتياجات كل من السلعتين من طاقة كل من المرحلتين.

• **التعليق**

أولاً ـ تحديد طبيعة المشكلة (تحديد الهدف) Determining the Nature of the Problem

نجد أن المشكلة في المثال (1) تتعلق بكيفية الوصول إلى أقصى الإيرادات (الأرباح) الممكنة. والهدف هنا هو تحقيق أعلى ربح ممكن وذلك من خلال بيع هاتين السلعتين الدراجات العادية والنارية.

ثانياً ـ تحديد المتغيرات التي تؤثر على هذه المشكلة Determining the Variables وهي تتمثل في الطاقة المحدودة والمتاحة ومنطقة الإمكانيات:

وهي تلك المتغيرات الموجودة في مشكلة البرمجة الخطية والتي تؤثر على الإيرادات والتكاليف وذلك حسب تغيرها. ومن خلال هذه المتغيرات نحاول تغييرها حتى نتمكن من الوصول إلى الحل الأمثل. وهذه المتغيرات تتمثل في المنتجات التي يمكن إنتاجها وبيعها، أو عوامل الإنتاج التي يمكن أن تقدم بنسب مختلفة لإنتاج سلعة أو منتجات محددة ومعروفة. ففي هذا المثال يمكن أن نرمز للسلع المنتجة كالآتي:

عدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى (الدراجات العادية) = x

عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية (الدراجات النارية) = y

تمثل الطاقة المحدودة والمتاحة الموارد النادرة المراد استغلالها أفضل استغلال ممكن لتحقيق الهدف المرغوب على أفضل صورة ممكنة. ويمثل المقدار المحدود والمتاح منها الحد الأقصى كما يمكن استخدامه خلال الفترة، وبالتالي فهي تمثل مجموعة القيود المحددة لإمكانيات تحقيق الأهداف. فكل مستوى من الأهداف يتطلب لأغراض تحقيقه قدراً يقل عما هو متاح من الموارد الثابتة أو يساويه ويصبح مستوىً ممكن التحقيق من الأهداف. أما أي مستوى يتطلب قدراً يزيد عما هو متاح من هذه الموارد فهو غير قابل للتحقيق، ويخرج عن حدود الإمكانيات المتاحة. فإذا كان حجم الإنتاج في المثال (1) يتطلب ما يزيد عن 12 ساعة/عمل أو ما يزيد عن 16 ساعة/عمل في الفترة التكاليفية يعتبر خارجاً على حدود إمكانيات الموارد المتاحة ولا يمكن تحقيقه. وتحدد الطاقة المحدودة والمتاحة لمجموعة الموارد الثابتة بصفة مجتمعة منطقة الإمكانيات التي في حدودها يمكن تحقيق الأهداف المرغوبة.

ولعله من الواضح أنه ما لم توجد موارد محددة المقدار أو القدرة تلزم لتحقيق

الأهداف المرغوبة فإنه لن يكون هناك قيود أو عوائق في سبيل تحقيق أي مستوى من هذه الأهداف. وفي ظل هذه الظروف لن تكون هناك مشكلة تحتاج إلى التوصل إلى الحل الأمثل. وبمعنى آخر، فإنه يلزم أن تتواجد في المشكلة عملية الندرة حتى يمكن تطبيق البرمجة الخطية لحلها.

وحيث إن المقدار المحدد من الموارد المحدودة يضع قيوداً على إمكانيات الأهداف، فإن تحديد هذا المقدار على وجه الدقة وبدرجة عالية من التأكد يصبح من مستلزمات التوصل لأفضل الحلول الممكنة للمشكلة قيد البحث والدراسة. فأي خطأ في تحديد المقدار المتاح من الموارد بالزيادة قد يؤدي إلى التوصل إلى حل لا يمكن تحقيقه للمشكلة. كما أن أي خطأ في تحديد هذا المقدار بالنقص قد يؤدي إلى حل غير مثالي للمشكلة الحقيقية.

ثالثاً ـ تحديد دالة الهدف والتعبير عنها في صورة معادلة رياضية Determining the Objective Function

في المثال (1) يجب أن نتساءل عن سعر بيع السلعة وتكلفتها المتغيرة ومن خلال المقارنة بينهما يمكن تحديد دالة الهدف. ومن المعروف أن التكلفة تنقسم إلى عناصر متغيرة وعناصر ثابتة. والعناصر المتغيرة في هذا الصدد هي تلك التي ترتبط بحجم إنتاج سلعة معينة وتتأثر بالتغيرات التي تطرأ عليه إيجاباً وسلباً تأثراً طردياً. بمعنى أنه عندما يزداد حجم الإنتاج تزداد التكاليف المتغيرة وعندما ينخفض حجم الإنتاج تنخفض التكاليف المتغيرة للحجم الجديد عن الحجم السابق. وسوف نفترض هنا بأن هذه العلاقة الطردية بين التكلفة المتغيرة وحجم الإنتاج لسلعة معينة تكون ذات نسبة ثابتة، أي أنها خطية ومتجانسة ومن الدرجة الأولى. وهذا يعني أن التكلفة المتغيرة للوحدة من السلعة تظل مقداراً ثابتاً بصرف النظر عن التغيرات في حجم الإنتاج. مثلاً إذا زاد حجم الإنتاج للسلعة الأولى (الدراجات العادية)، فلو فرضنا أن عدد الوحدات المنتجة لهذه السلعة زاد من وحدة واحدة إلى عشر وحدات، فإن التكلفة المتغيرة لحجم الإنتاج تزيد من 15 ديناراً إلى 150 ديناراً ومع ذلك تظل التكلفة المتغيرة للوحدة 15 ديناراً. أما إذا أدت زيادة حجم إنتاج السلعة الأولى (الدراجات العادية) إلى 10 وحدات إلى زيادة التكلفة المتغيرة للحجم مثلاً 166 ديناراً أو إلى 122 ديناراً فإن العلاقة في هذه الحالة لا تكون خطية. ويجب أن يكون واضحاً في ذهن القارىء أنه يلزم لتطبيق البرمجة الخطية أن تكون كل العلاقات خطية. أما التكاليف الثابتة فهي لا ترتبط بحجم الإنتاج في الفترة القصيرة، وإنما ترتبط بالزمن (المدى الطويل). هذا ولا يعتد بالتكاليف الثابتة لأغراض تخطيط الإنتاج والأرباح في الفترة القصيرة عن طريق البرمجة الخطية.

المقصود بسعر البيع هو السعر الذي يقوم المشروع موضوع البحث بتصريف السلعة على أساسه سواء للوسطاء أو المستهلكين. ونفترض في هذا الصدد أن سعر بيع السلعة

الواحدة موحد وثابت ولا تتأثر بحجم المبيعات. ويمثل الفرق بين سعر البيع والتكلفة المتغيرة ما يسمى بالربح المباشر، وهو الفائض من سعر البيع بعد تغطية التكاليف المتغيرة للسلعة، للمشاركة في تغطية التكاليف الثابتة وتحقيق الأرباح الصافية. فمن حصيلة الربح المباشر يتم تغطية التكاليف الثابتة، والزيادة في الحصيلة تمثل أرباحاً صافية، كما أن العجز فيها يمثل خسائر صافية. وفي افتراضاتنا السابقة يكون الربح المباشر لوحدة المنتج مقداراً ثابتاً، وتكون علاقة حصيلة الربح المباشر لسلعة معينة (أو لتشكيلة ثابتة من السلع) علاقة خطية. وطبقاً لما تقدم يكون الربح المباشر للوحدة من كل من السلعتين كما في الجدول (2 ـ 3).

جدول (2 ـ 3) ربح الوحدة الواحدة من السلعتين

	سعر بيع الوحدة	—	التكلفة المتغيرة للوحدة	=	الربح المباشر للوحدة
السلعة الأولى	25	—	15	=	10 دنانير
السلعة الثانية	50	—	20	=	30 ديناراً

وإذا رمزنا إلى حجم الإنتاج للسلعة الأولى (الدراجات العادية) بالرمز X وإلى حجم الإنتاج للسلعة الثانية (الدراجات النارية) بالرمز Y فإن دالة الربح المباشر أو الدالة الربحية للسلعتين معاً سوف تكون على النحو التالي:

$$\text{Max. } Z = 10x + 30y$$ (القيمة الكبرى)

هذه تعني أن حصيلة الربح المباشر من إنتاج وبيع السلعتين تتكون من 10 دنانير مضروبة في عدد الوحدات x التي يتم إنتاجها وبيعها من السلعة الأولى (الدراجات العادية) مضافاً إليها 30 ديناراً مضروبة في عدد الوحدات y التي يتم إنتاجها وبيعها من السلعة الثانية (الدراجات النارية).

وحيث إن المشروع الذي افترضناه يهدف إلى تعظيم الأرباح، وحيث إن تعظيم حصيلة الأرباح المباشرة يؤدي إلى تعظيم الأرباح الصافية ما دامت التكاليف الثابتة لا تتأثر بحجم الإنتاج والمبيعات، فإن دالة الربحية نطلق عليها دالة الهدف، وهي الركن الأول من أركان نموذج البرمجة الخطية. وتعتبر دالة الهدف دالة التفضيل والاختيار بين البدائل المختلفة للتوصل إلى أفضلها على الإطلاق.

رابعاً ـ تحديد الحدود والمقيدات في المشكلة والتعبير عنها في شكل متباينات Determining Constraints

وضع القيود اللازمة على المتغيرات وعرض هذه القيود بشكل معادلات قابلة للحل، وذلك لأن الموارد التي قد تتوفر تمتاز بأنها محدودة القيمة. بمعنى أنه يجب

تحديد احتياجات المنتجات من طاقة الموارد وقيود النموذج.

تمثل احتياجات المنتجات من الموارد علاقات المستخدم من الموارد الثابتة والمنتج. ويلزم في نموذج البرمجة الخطية أن تكون هذه العلاقات خطية متجانسة من الدرجة الأولى، بمعنى أنه إذا كانت الوحدة من المنتج الأول تحتاج إلى 3 ساعات من طاقة المورد الأول فإن وحدتين من السلعة نفسها يجب أن تستنفد 6 ساعات من المورد نفسه و10 وحدات من السلعة نفسها تستلزم استنفاد 30 ساعة من المورد نفسه وهكذا. ويعبر عن ذلك اقتصادياً بأن دالة الإنتاج تكون خطية متجانسة من الدرجة الأولى، أو بثبات غلة الموارد الثابتة من حجم الإنتاج.

ففي السابق رمزنا لعدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى بالرمز X وللسلعة الثانية بالرمز Y، فإننا الآن نستطيع التعبير عن علاقات المنتجات بالموارد في هذا المثال بالصورة الجبرية المبسطة التالية:

$4X + 6Y \leqslant 12$ المرحلة الآلية

$8X + 4Y \leqslant 16$ المرحلة اليدوية

وتعني المتباينة $4x + 6y \leq 12$ أن عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من السلعة الأولى (الدراجات العادية) x مضروبة في احتياجات كل وحدة من طاقة المرحلة الأولى (4 ساعات) مضافاً إليها عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من المنتج الثاني (الدراجات النارية) y مضروبة في احتياجات كل وحدة من طاقة المرحلة الأولى (6 ساعات) وهذا يجب أن لا يزيد عن مجموع حاصل الضرب عن الطاقة المتاحة في هذه المرحلة (12 ساعة/عمل)، أو يجب أن يقل عنه أو يساويه ($\leq$). وكذلك الأمر بالنسبة للمتباينة $8x + 4y \leq 16$ بالنسبة للمرحلة الثانية، ويطلق على المتباينتين:

$$4x + 6y \leq 12$$

$$8x + 4y \leq 16$$

القيود الموضوعية لمشكلة البرمجة الخطية، وهي الركن الثاني من أركان النموذج.

كما يطلق على احتياجات المنتجات من الموارد معاملات الاستخدام أو المعاملات الفنية. فمعامل استخدام السلعة الأولى من المرحلة الأولى 4 ومعامل استخدام لنفس السلعة من المرحلة الثانية 8، بينما معامل استخدام السلعة الثانية من المرحلة الأولى 6 ومعامل استخدام هذه السلعة من المرحلة الثانية 4 ويلزم أن تكون هذه المعاملات ثابتة بصرف النظر عن التقلبات في حجم الإنتاج. كما يلزم أن يتم تحديد هذه المعاملات بدقة متناهية وبدرجة عالية من التأكد حتى يؤدي نموذج البرمجة الخطية إلى التوصل إلى الحل الأمثل الحقيقي للمشكلة. ويلاحظ في المثال السابق أنه من غير المنطقي أن يكون حجم الإنتاج

من السلعتين أقل من الصفر، ذلك لأنه لا يمكن إنتاج حجم سالب. ويعني ذلك أن الحد الأدنى لحجم الإنتاج من السلعة الأولى هو الصفر، وكذلك بالنسبة للحد الأدنى لحجم السلعة الثانية. ويتم التعبير عن ذلك رمزياً كالآتي:

$$x \geqslant 0$$

$$y \geqslant 0$$

وهذان القيدان يعبران عن شرط عدم السلبية أو القيود التلقائية في نموذج البرمجة الخطية، وهي الركن الثالث من أركان النموذج.

خامساً ـ التكوين النهائي للمشكلة Final Formulation الصياغة الرياضية لمشكلة النموذج النمطي للبرمجة الخطية

قبل البدء في إيجاد الحل الأمثل لهذه المشكلة من المستحب وضع ملخص لها: وضع المشكلة في صورة معادلات رياضية خطية. ويتكون الشكل الرياضي العام لمسائل البرمجة الخطية. وهذه العلاقات الرياضية لهذا المثال يجب أن يكون على النحو التالي:

1 ـ معادلة دالة الهدف (عظمى، Max).

2 ـ المعادلات الخطية المفروضة التي تبين شروط ومقيدات والمسألة.

3 ـ شرط عدم السلبية.

يتحدد الهدف المراد تحقيقه بحل المشكلة بمعادلة دالة الهدف $\text{Max. } Z = 10x + 30y$ (القيمة الكبرى) ويتحقق هذا الهدف في ظل القيود الموضوعية المفروضة بالمتباينتين:

$4X + 6Y \leqslant 12$ المرحلة الآلية

$8X + 4Y \leqslant 16$ المرحلة اليدوية

والقيود التلقائية الظاهرة في المتباينة:

$$x, y \geqslant 0$$

وحيث إن الهدف المراد تحقيقه هو تعظيم حصيلة الأرباح المباشرة التي نرمز لها بالرمز (Z) فإن الصيغة الرياضية للمشكلة تتخذ الشكل النهائي لها وهي كالآتي:

دالة الهدف $\text{Max. } Z = 10x + 30y$ (القيمة الكبرى)
القيود
$4X + 6Y \leqslant 12$ المرحلة الآلية
$8X + 4Y \leqslant 16$ المرحلة اليدوية
شروط عدم السلبية:
$X, Y \geqslant 0$

والمشكلة بهذه الصيغة هي في صورة نموذج تقصي أرباح نمطي للبرمجة الخطية وهي التي تمثل المطلوب الأول في المثال السابق.

سادساً ـ إستخدام إحدى الطرق للبرمجة الخطية وهي على النحو الآتي:

1 ـ طريقة التحليل البياني.

2 ـ طريقة السيمبليكس (العامة).

هذا وسوف يتم استخدام هذه الطرق بعد إعطاء فكرة عامة وأمثلة عن كيفية وضع أو بناء المشكلة في صورتها النهائية. أما بالنسبة للمطلوب الثاني والثالث والرابع في هذا المثال سوف نحدد حلهما في ما بعد. والجدول (3 ـ 3) يبين بعض الأمثلة لكيفية إيجاد التكوين النهائي لمشكلة البرمجة الخطية للقيمة العظمى وهي تمثل بعض الاستخدامات للبرمجة الخطية في مختلف المجالات:

جدول (3 ـ 3) أمثلة لكيفية إيجاد التكوين النهائي لمشكلة البرمجة الخطية للقيمة العظمى

المشكلة	التكوين النهائي للمشكلة
(1) ـ يتم إنتاج نوعين من المنتجات على ثلاث آلات حيث تصل الطاقة المتاحة لكل آلة 10 ساعات يومياً. يلخص الجدول الآتي زمن الإنتاج بالدقائق وربح الوحدة لكل نوع من المنتجات. ربح الوحدة — الآلة 3 — الآلة 2 — الآلة 1 — المنتج 2DL — 8 — 6 — 10 — x1 3DL — 15 — 20 — 5 — x2 المطلوب/صياغة المشكلة على شكل برمجة خطية، وإيجاد الحل الأمثل بيانيا	دالة الهدف $Max.\ Z = 2x1 + 3x2$ قيود أو شروط المشكلة الآلة (1) $10x1 + 5x2 \leq 600$ الآلة (2) $6x1 + 20x2 \leq 600$ الآلة (3) $8x1 + 15x2 \leq 600$ شرط عدم السلبية $x1, x2 \geq 0$ $x1 = 54.5 \quad x2 = 10.9 \quad Z = 141.7$
(2) ـ يتم إنتاج 4 منتجات بصورة متتابعة على الآلتين ويظهر الجدول التالي زمن إنتاج الوحدة على كل آلة الآلة — x1 — x2 — x3 — x4 1 — 2 — 3 — 4 — 2 2 — 3 — 2 — 1 — 2 وتعتمد التكلفة الكلية لإنتاج الوحدة من كل منتج بصورة مباشرة على زمن الآلة (المقدر بالساعة) وبفرض أن تكلفة عمل الساعة للآلتين 1 & 2 تبلغ 10 دنانير & 15 ديناراً على التوالي. وأن الطاقة المخصصة للإنتاج على الآلتين بلغت 380 & 500 ساعة عمل على التوالي، وأن سعر بيع الوحدة من المنتجات يبلغ للآلة الأولى 65 والثانية 70 والثالثة 70 والرابعة 55 ديناراً. المطلوب / صياغة المشكلة في شكل نموذج برمجة خطية لتحقيق أعلى ربح ممكن؟	دالة الهدف: $Max\ Z = 55x1 + 55x2 + 70x3 + 55x4$ شروط المشكلة آلة (1) $2x1 + 3x2 + 4x3 + 2x4 \leq 500$ آلة (2) $3x1 + 2x2 + x3 + 2x4 \leq 380$ شرط عدم السلبية $x1, x2, x3, x4 \geq 0$
(3) ـ مصنع ينتج نوعين من أثاث المكاتب: مكتبات، ويرمز لها (L)، وطاولات ويرمز لها بالرمز (T). يتطلب إنتاج هذين المنتجين مرورهما على قسمين إنتاجيين وهما: قسم التجميع ويرمز له بالرمز (X)، وقسم التجميع النهائي ويرمز له بالرمز (Y). لنفرض أيضاً أن الطاقة الإنتاجية للقسمين المذكورين بالساعات: هي 60 ساعة لقسم التجميع، 48 ساعة لقسم التجهيز النهائي. وان كل مكتبة تحتاج لأربع ساعات في قسم التجميع، وساعتين في قسم التجهيز النهائي، بينما تحتاج كل طاولة لساعتين في قسم التجميع، واربع ساعات في قسم التجهيز النهائي، وأن الربح من كل مكتبة هو ثمانية دنانير، وستة دنانير عن كل طاولة. المطلوب / ما هو عدد الوحدات التي يجب على المصنع إنتاجها من السلعتين بحيث يحقق من خلال ذلك أكبر ربح ممكن؟	دالة الهدف $Maximize\ (z) = 8L + 6T$ شروط وقيود المشكلة $4L + 2T \leq 60$ $2L + 4T \leq 48$ شرط عدم السلبية $L, T \geq 0$

II ـ تكوين المشكلة في حالة القيمة الصغرى

● **مثال (2)** لنأخذ المثال التالي لتوضيح الخطوات الأساسية للبرمجة الخطية.

نفرض أن إدارة مشروع للتربية الحيوانية ترغب في اتخاذ قرار للتوصل إلى مزيج معين من علف الحيوان وهذا المزيج مركب من مادتين غذائيتين، بحيث أن يحقق هذا المزيج الشروط الأساسية للتغذية المثالية وبأقل تكلفة ممكنة. ونفرض أن الشروط الأساسية المطلوبة لكل مادة (وحدة التغذية) يجب أن تتحقق فيه كحد أدنى من العناصر التالية:

بروتينات 9 وحدات
أملاح البوتاسيوم 8 وحدات
أملاح الكالسيوم 12 وحدة

وبافتراض أن العلف الأول من المادة الغذائية يحتوي على 3 وحدات من البروتينات ووحدة واحدة من أملاح البوتاسيوم والكالسيوم، وتبلغ تكلفته 4 دنانير للكيلوغرام الواحد من العلف. أما بالنسبة للعلف الثاني فإنه يحتوي على وحدة واحدة من البروتينات ووحدتين من أملاح البوتاسيوم و6 وحدات من أملاح الكالسيوم، وتبلغ تكلفته 6 دنانير للكيلوغرام الواحد من العلف. وترغب إدارة المشروع تحديد المزيج الأمثل من العلفين بحيث تتحقق فيه الشروط الأساسية المطلوبة وبأقل تكلفة ممكنة.

● **الحل**

المعلومات المتوفرة في المثال يمكن تلخيصها في الجدول (4 ـ 3)

جدول (4 ـ 3) ملخص للمشكلة

محتويات المادة الغذائية	أنواع الأعلاف		الحد الأدنى من المادة الغذائية
	العلف الأول	العلف الثاني	
بروتينات	3	1	9
أملاح البوتاسيوم	1	2	8
أملاح الكالسيوم	1	6	12
تكلفة الكيلوجرام الواحد	4	6	

● **التعليق**

أولاً ـ تحديد طبيعة المشكلة (تحديد الهدف) Determining the Nature of Problem (Determining Objective)

في هذا المثال نجد أن المشكلة تتعلق بالقيمة الصغرى، وهي كيفية الوصول إلى الهدف وبأقل تكلفة ممكنة.

ثانياً ـ تحديد المتغيرات التي تؤثر على هذه المشكلة Determinig the Variables

وهي تتمثل في الطاقة المحدودة والمتاحة ومنطقة الإمكانيات.

هذه المشكلة يوجد فيها متغيران وهما تحديد الكيلوغرامات التي يجب إنتاجها من العلفين.

عدد الكيلوغرامات التي يمكن إنتاجها من العلف الأول = A

عدد الكيلوغرامات التي يمكن إنتاجها من العلف الثاني = B

ثالثاً ـ تحديد دالة الهدف والتعبير عنها في صورة معادلة رياضية Determining the Objective Function

الهدف في هذه الحالة هو البحث عن كيفية تخفيض التكاليف. وحيث إن الكيلوغرام من العلف الأول تكلفته 4 دنانير، والعلف الثاني تكلفته 6 دنانير للكيلوغرام الواحد، فإن دالة الهدف تكون كالآتي:

دالة الهدف $Min.\ Z = 4A + 6B$ (القيمة الصغرى)

ويجب أن يتحقق هذا الهدف في ظل شروط تحقيق الحد الأدنى المطلوبة في وحدة التغذية من بروتينات وبوتاسيوم وكالسيوم.

رابعاً ـ تحديد الحدود والمقيدات في المشكلة والتعبير عنها في شكل متباينات Determining Constraints

وحيث إن الحد الأدنى المطلوب من البروتينات هو 9 وحدات/وحدة غذائية. وحيث إن الوحدة من A تحتوي على 3 وحدات من البروتين، والوحدة من B تحتوي على وحدة واحدة من البروتين، فإن معادلة البروتينات تكون كالآتي:

بروتينيات $3A + B \geqslant 9$

ويلاحظ أن إشارة التباين تتطلب أن لا يقل (أكبر من أو يساوي) كمية البروتينات في المزيج عن 9 وحدات. حيث تمثل هذه الكمية الحد الأدنى المطلوب توافره. وبنفس المنطق نجد أن معادلة الأملاح والبوتاسيوم تكون كالآتي:

أملاح البوتاسيوم $A + 2B \geqslant 8$

أملاح الكالسيوم $A + 6B \geqslant 12$

خامساً ـ التكوين النهائي للمشكلة Final formulation الصياغة الرياضية لمشكلة النموذج النمطي للبرمجة الخطية

من خلال الخطوات السابقة يمكن تحديد الصيغة الرياضية للمشكلة بالكامل وهي كالآتي:

دالة الهدف $Min.\ Z = 4A + 6B$ (القيمة الصغرى) القيود $3A + B \geqslant 9$ بروتينيات $A + 2B \geqslant 8$ أملاح البوتاسيوم $A + 6B \geqslant 12$ أملاح الكالسيوم شروط عدم السلبية $A, B \geqslant 0$

لاحظ أن علامات التباين الخاصة بالقيود لمشكلة القيمة الصغرى هي عكس التباين في مشكلة القيمة العظمى السابقة (مثال رقم 1)، وهذه تعتبر قاعدة عامة في النموذج النمطي للبرمجة الخطية.

والجدول (5 ـ 3) يبين بعض الأمثلة لكيفية إيجاد التكوين النهائي لمشكلة البرمجة الخطية للقيمة الصغرى وهي تمثل بعض الاستخدامات للبرمجة الخطية في مختلف المجالات:

جدول (5 ـ 3) أمثلة لكيفية إيجاد التكوين النهائي لمشكلة البرمجة الخطية للقيمة الصغرى

المشكلة	التكوين النهائي للمشكلة
(1) يرغب مزارع في شراء كمية من علف الدواجن بحيث تحتوي الكمية المشتراة على الموارد الضرورية للنمو (X1, X2, X3, X4). الحد الأدنى للكمية المغذية حسب الجدول التالي: المادة المغذية x1 x2 x3 x4 الحد الأدنى (جرام) 90 48 15 20 فإذا كان هناك صنفان من العلف وكل صنف يحتوي على المواد الغذائية حسب المعلومات التالية: المادة المغذية x1 x2 x3 x4 المحتويات من المادة المغذية	دالة الهدف $Min.\ Z = 200y_1 + 300y_2$ القيود المادة الأولى $4y_1 + 10y_2 \geqslant 90$ المادة الثانية $5y_1 + 3y_2 \geqslant 48$ المادة الثالثة $5y_1 + 0y_2 \geqslant 15$ المادة الرابعة $2y_1 + y_2 \geqslant 20$ شروط السلبية $y_1, y_2 \geqslant 0$

المشكلة	التكوين النهائي للمشكلة
صنف A 4 5 5 2 صنف B 10 3 0 1 مع العلم بأن سعر الشراء للصنف $A = 200$ درهم والصنف $B = 300$ درهم. المطلوب/ بناء النموذج الرياضي على شكل برمجة خطية لكمية العلف المثلى وبأقل التكاليف؟	
(2) ـ يحتاج أحد المشروعات لإنتاج مادة معينة يدخل في تركيبها المادة (X1) والمادة (X2). وإن تكلفة المادة الأولى تعادل دينارين للوحدة الواحدة وتكلفة المادة الثانية 4 دنانير للوحدة الواحدة. وأن المشروع بحاجة إلى 50 ساعى عمل أو أقل من المادة الأولى وعلى الأقل 100 ساعة من الثانية ويحتاج المشروع إلى ما مجموعه 200 ساعة للمادتين. المطلوب/ بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة؟	دالة الهدف $Min.\ Z = 2X1 + 4X2$ شروط وقيود المشكلة $X1 \leqslant 50$ $X2 \geqslant 100$ $X1 + X2 = 200$ شروط عدم السلبية $X1, X2 \geqslant 0$
(3) ـ ينوي مزارع لتربية 20000 طير لإطعامها لمدة ثمانية أسابيع ومن ثم بيعها علماً بأن معدل العلف الأسبوعي للطير الواحد هو باوند (455 غم تقريباً) ومن أجل الوصول بالطيور إلى وزن معين على المزارع تحضير علف يحتوي على خلطة من المواد (A, B, C) بحيث يتوفر في هذه المواد العناصر الغذائية الرئيسية التالية: كالسيوم، بروتين، فيتامين. فإذا علمت بأن المادة (A) تحتوي في الباوند الواحد على 38٪ باوند كالسيوم وأن تكلفة الباوند 4 قروش وأن الباوند الواحد من المادة الثانية يحتوي على 001 . باوند كالسيوم، 09 . بروتين 02 . فيتامين وسعر الباوند الواحد منها 15 قرشا وأن الباوند الواحد من المادية الثالثة يحتوي على 002 . كالسيوم 50 بروتين و08 . فيتامين وسعر الباوند يساوي 40 قرشا. وأن الخلطة يجب أن تحتوي على 1 ـ على الأقل 8٪ كالسيوم على أن لا تزيد النسبة عن 1.2٪. 2 ـ على الأقل 22٪ بروتين. 3 ـ على الأكثر 5٪ فيتامينات. المطلوب/ بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة؟	دالـة الـهـدف $Min.\ Z = 0.04A + 0.15B + 0.40C$ شروط وقيود المشكلة $A + B + C \geqslant 20000$ $0.372A - 0.007B - 0.006C \geqslant 0$ $0.368A - 0.001B - 0.01C \leqslant 0$ $0.22A + 0.13B - 0.28C \leqslant 0$ $0.05A + 0.03B - 0.03C \geqslant 0$ شروط عدم السلبية $A, B, C \geqslant 0$

● طرق البرمجة الخطية

1 ـ طريقة التحليل البياني.

2 ـ طريقة السيمبليكس (العامة).

1 ـ طريقة التحليل البياني Graphical Analysis Method

يتميز الحل لمشكلة البرمجة الخطية بالسهولة والوضوح والسرعة، إذ إننا بالنظر إلى الرسم البياني الذي تتمثل فيه جميع الشروط والمتغيرات يمكننا أن نجد الحلول المختلفة للمشكلة وأن نقارن القيم التي تتخذها الدالة الهدفية في هذه الحلول، بمعنى نقارن الأرباح والإيرادات أو التكاليف عند هذه الحلول المقارنة. إلا أنه لا يمكننا الحصول على الحل البياني للمشكلة إلا إذا كان هناك متغيران أو ثلاثة على أكثر تقدير، حيث إننا نجد من المستحيل رسم وتفهم رسم بياني ذي أربعة جوانب أساسية (وهي متغيرات المشكلة لكل متغير جانب) وبالطبع إذا ما زاد عدد المتغيرات عن ثلاثة فيمكن استخدام الطريقة الجبرية أو طريقة السيمبليكس Simplex Method.

I ـ إستخدام طريقة التحليل البياني لحل مشكلة القيمة العظمى

ففي مثالنا رقم (1) السابق يمكن استخدام معادلات التكوين النهائي وحلها عن طريق استخدام طريقة التحليل البياني، لأنه يوجد متغيران فقط في هذا المثال. والمعادلات هي كالآتي:

دالة الهدف $Max.\ Z = 10x + 30y$ (القيمة الكبرى)
القيود
المرحلة الآلية $4X + 6Y \leqslant 12$
المرحلة اليدوية $8X + 4Y \leqslant 16$
شرط عدم السلبية
$X, Y \geqslant 0$

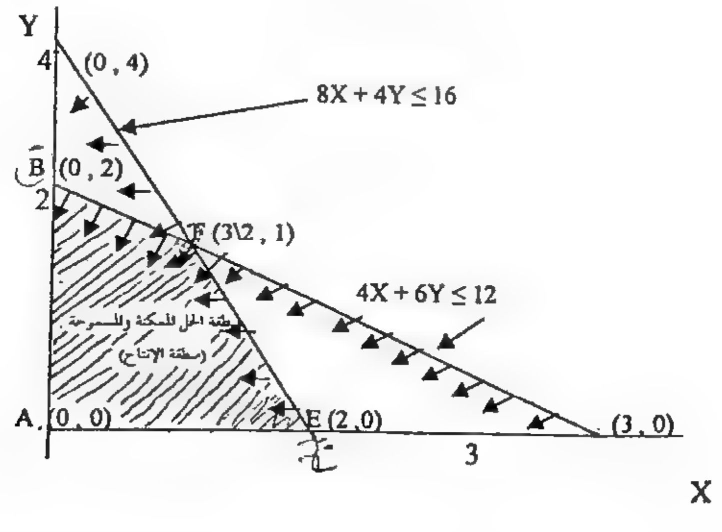
الآن يمكن أن نبدأ بتمثيل الدراجات النارية على المحور العمودي والدراجات العادية على المحور الأفقي، ويعبر عن القيود في شكل خطوط مستقيمة تصل بين نقطتين واحدة على المحور العمودي والأخرى على المحور الأفقي، كما هو مبين في الرسم البياني (1 ـ 3). والآن يمكن تحليل المتباينات السابقة في هذا المثال على النحو التالي:

بالنسبة للمتباينة الأولى $4x + 6y \leq 12$ فإنه يمكن رسمها بافتراض، أولاً: ـ أننا سوف لن ننتج شيئاً من الدراجات العادية $x = 0$، وبالتالي فإن كل الوقت المتاح (12 ساعة) سوف يستخدم في إنتاج الدراجات النارية x ذلك سنفترض أننا لن ننتج شيئاً من الدراجات النارية، $y = 0$ فقط. وبعد وبالتالي فإن كل الوقت المتاح (12 ساعة)

سيستخدم في إنتاج الدراجات العادية فقط. أي بمعنى تحول كل متباينة إلى معادلة باقتراض استخدام كل الطاقة الإنتاجية في إنتاج إحدى السلعتين. فإذا كانت $x = 0$ فإن y تساوي $\frac{12}{6}$، وتساوي 2 دراجة نارية، وبذلك فإن هذه النقطة، والتي تمثل الرأس الأول للخط الذي يمثل معادلة القيد الأول هي (2، 0). أما إذا كانت $y = 0$ فإن x تساوي $\frac{12}{4}$، وتساوي 3 دراجة عادية، وبذلك فإن هذه النقطة، والتي تمثل الرأس الثاني للخط، الذي يمثل معادلة القيد الأولى هي (0، 3). أنظر إلى الرسم البياني الذي يبين ذلك، في هذا الرسم، والذي يبين الخط المستقيم للمعادلة الأولى، وبما أن إشارة هذه المعادلة أقل أو تساوي $\leq$ وهذا يعني أن الاتجاه المسموح به هو كل النقاط التي تقع على الخط المستقيم وكل النقاط الأخرى التي تقع أسفل هذا الخط بحيث نجد أن المنطقة المسموحة تمثل المثلث الذي يقع على المنطقة الموجبة الواقعة على اليمين.

بالنسبة للمتباينة الثانية $8x + 4y \leq 16$ تستخدم فيها نفس الإجراءات التي اتبعناها في المعادلة الأولى، وذلك بافتراض أن الطاقة الإنتاجية لسلعة معينة = صفر ومنه نستطيع الحصول على قيمة السلعة الأخرى وبالعكس. بافتراض أن $x = 0$ إذا $(y = \frac{16}{4} = 4)$ ومعنى ذلك بأن هذه النقطة تساوي $(x,y) = (0,4)$ وبافتراض أن $y = 0$ إذا $(x = \frac{16}{8} = 2)$ وهذا يعني بأن النقطة على الرسم تمثل قيمة كل من $(x, y) = (2, 0)$ في الحالة الثانية.

الرسم البياني (1 ـ 3)



ونظراً لأن إتمام عملية الإنتاج تتطلب مرور كل من الدراجات العادية والنارية في المرحلة الآلية واليدوية، فإن المنطقة التي تحتوي على الحلول تنتج في الشكل الرباعي

الذي تشترك فيه المتباينتان الأولى والثانية، والتي تحدد الخلط أو المزيج السلعي الذي يحقق أقصى ربح ممكن. وبعد تحديد النقاط على الرسم البياني نصل إلى المنطقة المحددة والمحصورة في الشكل الرباعي (A,B,F,E)، ومن خلال هذا المضلع يمكن تحديد **الحلول الأساسية** وهي النقاط التي تقع على رؤوس الشكل الرباعي والتي تحدد منطقة الإنتاج الممكنة، وبتعويض قيم هذه النقاط على معادلة دالة الهدف، ومن خلال القيم الناتجة يمكن أن نحدد **الحل الأمثل** وهو الذي يمثل أعلى قيمة (أعلى ربح).

كما نلاحظ بأن الشكل (A,B,F,E) يمثل منطقة الحل الممكنة، بمعنى أن كل الحلول التي تقع بداخله وعلى محيطه تمثل حلول ممكنة Feasible Solution Area ومسموحة، لأن أية تشكيلة إنتاجية من (x,y) داخل هذه المنطقة وعلى محيطها لن تتطلب أكثر من الطاقة الإنتاجية المتاحة في المرحلة الآلية والطاقة الإنتاجية في المرحلة اليدوية. ويمكنك الآن إجراء بعض التجارب على النقاط الواقعة بداخل وعلى محيط المضلع للتأكد من ذلك.

الآن في المثال رقم (1) نستطيع أن نضع الإجابة **للمطلوب الثاني**، ويمكن أن نتساءل ما هي النقطة التي تمثل الحل الأمثل؟ وكيف يتم تحديدها؟ يمكن الإجابة على هذا كالآتي:

الإجابة تكون عن طريق:

1 ـ التعويض في دالة الهدف والحصول على قيمة Z.

2 ـ إنحدار (ميل) دالة الهدف. وذلك عن طريق تحريك منحنى دالة الهدف إلى أعلى حتى يلامس رأس المضلع من أعلى فتمثل هذه النقطة هي نقطة الحل الأمثل.

1 ـ عن طريق التعويض في دالة الهدف:

نحدد إحداثيات النقاط الطرفية (رؤوس المضلع) في منطقة الحل ونعوض قيم الإحداثيات x,y في دالة الهدف وهي كالآتي:

دالة الهدف $Max.\ Z = 10x + 30y$ (القيمة الكبرى)

● **التعويض بقيم النقطة (A) (0.0):**

$$Max.Z = 10x + 30y = 10(0) + 30\,() = 0$$

الربح عند النقطة (A) يساوي صفراً، وذلك لعدم وجود الإنتاج في هذه النقطة، بمعنى أن المشروع لم يبدأ في العمليات الإنتاجية. ولكن مع ذلك فإن الحل يرضى معادلتي القيود وشرط عدم السلبية. ويسمى الحل عند هذه النقطة بالحل المبدئي الممكن Initial Basic Feasible Solution ولكن هذا الحل ليس له معنى من الناحية الاقتصادية، حيث ليس من المعقول أن يبقى هذا المشروع متوقفاً دون إنتاج، وهذا الحل سوف يتكرر

مرة أخرى عند التعرض لأسلوب السيمبليكس كأداة أخرى لاتخاذ القرارات. ونلاحظ عند تعويض قيم هذه النقطة في معادلات القيود تكون كالآتي:

$$4X + 6y \leqslant 12 \qquad = 4\,(0) + 6\,(0) \leqslant 12$$

$$8X + 4y \leqslant 16 \qquad = 8\,(0) + 4\,(0) \leqslant 16$$

$$x, y \geqslant 0$$

● التعويض بقيم النقطة (B) (0,2):

$$Max.Z = 10x + 30y = 10(0) + 30\,(2) = 60$$

نلاحظ أن الحل عند هذه النقطة أفضل من الحل عند النقطة السابقة، حيث ارتفعت الأرباح من صفر إلى 60 ديناراً. مع ملاحظة أن الحل عند هذه النقطة هو الآخر يرضى معادلتي القيود وشرط عدم السلبية.

● التعويض بقيم النقطة (E) (2,0):

$$Max.Z = 10x + 30y = \qquad 10(2) + 30\,(0)) = 20$$

نلاحظ أن هذه النقطة هي أفضل من النقطة A بينما النقطة B هي أفضل منها. فنجد الأرباح عند هذه النقطة تساوي 20 ديناراً، ومع ذلك فإن هذا الحل لم يخرج أيضاً من معادلتي القيود وشرط عدم السلبية.

● التعويض بقيم النقطة $(F)(\frac{3}{2},1)$:

لإيجاد قيمة الأرباح عند هذه النقطة F نحتاج أولاً إلى إيجاد الحل عند هذه النقطة، ويمكن تحديد قيمة الحل عندها:

1 ـ إما بإسقاط خط عمودي على محور السينات، وخط عمودي على محور الصادات، وذلك انطلاقاً من النقطة F والنقطتين اللتين يمس فيهما هذه الأعمدة لمحور السينات والصادات، اللذين يمثلان عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من الدراجات العادية والنارية.

2 ـ إما أن يتم حل معادلتي القيود آنياً، أي في آن واحد، وحتى يتم ذلك نفترض حالة التساوي بين الطرف الأيمن والأيسر في كل من معادلتي القيود، لأن ذلك المعادلتين تلتقيان في نقطة واحدة هي F. ويمكن تحليل المعادلتين كالآتي:

F عند النقطة $4x + 6y \leq 12 = \ 8x + 4y \leq 16$

يمكن وضعة المعادلتين في حالة التساوي كما يلي:

$$4x + 6y = 12$$

$$8x + 4y = 16$$

بضرب المعادلة الأولى في 2 ثم طرح المعادلة الثانية منها يكون الناتج كالآتي:

$$2\,(4x + 6y) = 2\,(12)$$

بطرح المعادلتين بعضهما البعض

$$8X + 12y = 24$$

$$8x + 4y = 16$$

$$0 + 8y = 8$$

إذاً:

$$8y = 8 \Longrightarrow \quad y = \tfrac{8}{8} = 1$$

والآن يمكن التعويض في أية معادلة الأولى أو الثانية عن قيمة y بما يساويها ونستنتج قيمة x وهي كالآتي:

المعادلة الأولى

$$4x + 6(1) = 12 \Longrightarrow 4x + 6 = 12 \Longrightarrow 4x = -6 + 12 \Longrightarrow 4x = 6$$

$$x = \tfrac{6}{4} = \tfrac{3}{2}$$

المعادلة الثانية

$$8x + 4y = 16 \Longrightarrow 8x + 4(1) = 16 \Longrightarrow 8x + 4 = 16 \Longrightarrow$$

$$8x = -4 + 16 \Longrightarrow 8x = 12 \Longrightarrow x = \tfrac{12}{8} = \tfrac{3}{2}$$

بعد التحليل السابق قيمة x, y $(\frac{3}{2}, 1)$ عند النقطة F. ولأنه يمكن تعويض هذه القيمة في دالة الهدف لكي تحصل على الأرباح عند هذه النقطة:

$$Max.Z = 10x + 30y \qquad = 10(\tfrac{3}{2}) + 30(1) = 45$$

نلاحظ أن هذه النقطة لا تمثل الحل الأمثل لأنها أقل من النقطة B.

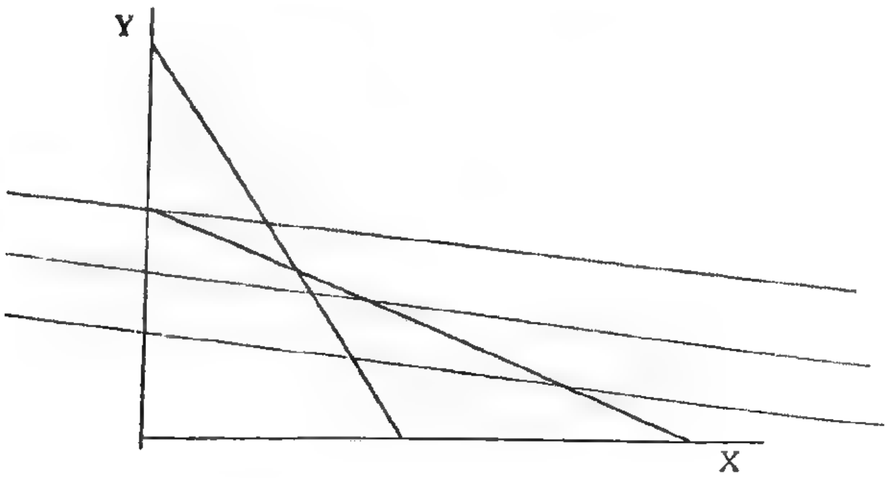
نستنتج من خلال هذه التحاليل السابقة بأن أعلى قيمة تمثل أعلى ربح يمكن تحقيقه تكون عند النقطة B وقيم هذه النقطة (0,2). إذاً يجب على المشروع عدم الإنتاج من السلعة الأولى وهي الدراجات العادية ويجب أن ينتج وحدتين من الدراجات النارية. ويحقق أعلى ربح من ذلك الإنتاج قدره 60 ديناراً.

2 - إيجاد الحل عن طريق منحنى دالة الهدف [عن طريق انحدار (ميل) دالة الهدف].

والواقع أن دالة الهدف (أقصى ربح) في نموذج البرمجة الخطية تقوم بدور منحنيات

الناتج المتساوي في شأن تحديد توازن المنتج أو بدور **منحنيات السواء في** شأن تحديد توازن المستهلك. ففي الحالة الأولى يرغب المنتج في التوصل إلى أعلى منحنى للناتج المتساوي يمس حدود الإمكانيات الإنتاجية. وفي الحالة الثانية يرغب المستهلك التوصل إلى أعلى منحنى سواء يمس حدود إمكانيات ميزانيته. وفي كلتا الحالتين فإن أفضل النقاط الممكنة هي نقطة التماس. وكما أن خريطة منحنيات السواء تتكون من عائلة لا نهائية العدد من هذه المنحنيات المتوازية وغير المتقاطعة فإن دالة الهدف تتكون من عائلة من الخطوط المستقيمة المتوازية وغير المتقاطعة. وعن طريق افتراض أرباح معينة واستخدام طريقة الخطأ والتجربة عن دالة الهدف، الرسم البياني (2 ـ 3) يبين ذلك. ولكن هذه الطريقة غير مضمونة للوصول إلى الحل الأمثل.

الرسم البياني (2 ـ 3)



- **الإجابة على المطلوب الثالث في المثال رقم (1).** إيجاد عدد الساعات غير المستغلة وفي أية مرحلة إن وجدت؟ بما أن الحل هو عند النقطة B والتي تبين أن عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من الدراجات العادية تساوي صفراً (أي بمعنى يجب ألا نتتج من هذه السلعة 0 = x)، وأن عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من الدراجات النارية يساوي وحدتين فقط ($y = 2$). والتعويض عن هذه الكميات في معادلات القيود:

$4X + 6Y \leqslant 12 \quad = \quad 4(0) + 6(2) = 12$

$8X + 4Y \leqslant 16 \quad = \quad 8(0) + 4(2) = 8$

الطاقة المتاحة في المرحلة البدوية — 16 ساعة

الطاقة المستغلة في المرحلة اليدوية — 8 ساعات

الطاقة الضائعة أو غير المستغلة — 8 ساعات

إذاً هناك طاقة إنتاجية ضائعة أو غير مستغلة في المعادلة الثانية والتي تمثل المرحلة اليدوية وقدرها 8 ساعات عمل.

- الإجابة على **المطلوب الرابع** في المثال رقم (1). ما هو القرار الأمثل الذي يجب اتخاذه إذا تغيرت أرباح السلعتين كأن أصبح المشروع يحقق ربحاً قدره 30 ديناراً عن الدراجة العادية و10 دنانير عن الدراجة النارية (إختبار الحساسية)؟

إذا تغيرت دالة الهدف أصبحت كالآتي:

دالة الهدف $Max, Z = 30x + 10y$ (القيمة الكبرى)

$Max.Z \text{ at Point } A(0,0) = 30(0) + 10(0) = 0$

$Max.Z \text{ at point } B(0.2) = 30(0) + 10(2) = 20$

$Max.\ Z \text{ at point } E(2,0) = 30(2) + 10(0) = 60$

$Max.Z at\ point\ F(\frac{3}{2}, 1) = 30(\frac{3}{2}) + 10(1) = 55$

في هذه الحالة، أفضل قرار يتم اتخاذه هو عند النقطة E والتي يجب فيها المشروع أن ينتج وحدتين من الدراجات العادية وعدم إنتاج أية وحدة من الدراجات النارية، بحيث يحقق المشروع ربحاً وقدره 60 ديناراً. ملاحظة: لقد تغيرت النقطة من B إلى E والربح كان متساوياً في كلا النقطتين يساوي 60 ديناراً. أما بالنسبة لإيجاد عدد الساعات غير المستغلة وفي أية مرحلة إن وجدت، فيمكن التعويض عن هذه الكميات في معادلات القيود.

$4X + 6Y \leqslant 12 \quad = \quad 4(2) + 6(0) = 8$

$8X + 4Y \leqslant 16 \quad = \quad 8(2) + 4(0) = 16$

الطاقة المتاحة في المرحلة الآلية — 12 ساعة

الطاقة المستغلة في المرحلة الآلية — 8 ساعات

الطاقة الضائعة أو غير المستغلة — 4 ساعات

إذاً هناك طاقة إنتاجية ضائعة أو غير مستغلة في المعادلة الأولى والتي تمثل المرحلة الآلية وقدرها 4 ساعات عمل.

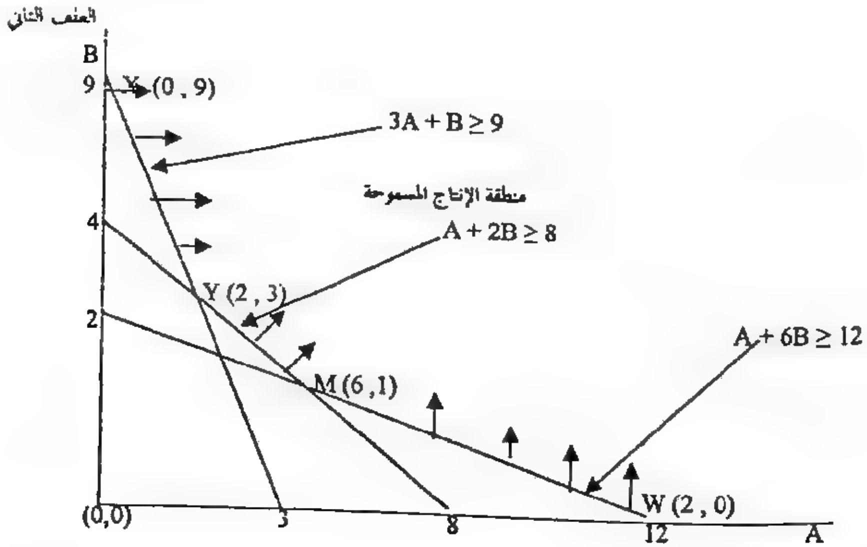
II ـ إستخدام طريقة التحليل البياني لحل مشكلة القيمة الصغرى

في مثالنا رقم (2) السابق يمكن استخدام معادلات التكوين النهائي وحلها عن طريق استخدام طريقة التحليل البياني، لأنه لا يوجد بها متغيران. والمعادلات هي كالآتي:

دالة الهدف: $Min.Z = 4A + 6B$ (القيمة الكبرى)
القيود:
بروتينيات $3A + B \geqslant 9$
أملاح البوتاسيوم $A + 2B \geqslant 8$
أملاح الكالسيوم $A + 6B \geqslant 12$
شرط عدم السلبية $A, B \geqslant 0$

ويمكن الآن إظهارها بيانياً برسم المتساويات في القيود على الرسم البياني (3 ـ 3):

الرسم البياني (3 ـ 3)



من الرسم البياني السابق نستنتج الآتي:

1 - منطقة الإنتاج المسموح بها لمشكلة القيمة الصغرى تقع أعلى تقاطع متساويات القيود.

2 - معادلات القيود يتطلب أن تزيد محتويات المزيج عن الحد الأدنى المطلوب توافره. في معادلة البروتينات مثلاً يتطلب أن تزيد محتويات مزيج A,B من البروتينات عن 9 وحدات، وبالتالي نجد أن الشرط يتحقق بأية نقطة تقع فوق هذا الخط وعلى الخط نفسه. وهكذا بالنسبة لكل من القيدين الثاني والثالث.

والآن يمكن إيجاد الحل الأمثل عن طريق تعويض النقاط الركنية على دالة الهدف.

دالة الهدف $Min.Z = 4A + 6B$ (القيمة الصغرى)

● النقطة X (0,9)

$$Min.Z = 4A + 6B = 40\,(0) + 6\,(9) = 54$$

● النقطة Y (2,3)

يمكن إيجاد قيم النقطة A,B عن طريق حل المعادلتين:

$$3A + B \geqslant 9$$
$$A + 2B \geqslant 8$$

لأن هاتين المعادلتين تتساويان عند النقطة Y بضرب المعادلة الأولى في 2 وطرحها من المعادلة الثانية يكون الناتج كالآتي:

$$2\,(3A + B) = 2(9)$$
$$6A + 2B = 18$$
$$8A + 2B = 8$$

$$5A + 0 = 10$$

إذا A تساوي $\frac{10}{5} = 2$ وبتعويض قيمة A في أي من المعادلتين نستطيع أن نتحصل على قيمة B وهي كالآتي: التعويض في المعادلة الأولى مثلاً:

$$3A + B \geqslant 9 = 3\,(2) + B = 9$$
$$6 + B = 9 = B = -6 + 9$$

إذا $B = 3$ وقيمة A, B عند النقطة Y تساوي (3، 2)

الآن يمكن التعويض في دالة الهدف بهذه القيم:

$$Min.Z = 4A + 6B = 4\,(2) + 6\,(3) = 26$$

● النقطة M (6,1)

يمكن تحديد قيم النقطة M بنفس الإجراءات السابقة وذلك عن طريق المعادلتين التاليتين:

$$A + 6B \geqslant 12$$
$$A + 2B \geqslant 8$$

بطرح المعادلة الأولى من الثانية يكون الناتج كالآتي:

$$A + 6B \geqslant 12$$
$$A + 2B \geqslant 8$$

$$0 + 48 = 4$$

إذا $(B = \frac{4}{4} = 1)$ ويمكن تحديد قيمة A عن طريق تعويض قيمة B في أية معادلة من المعادلات السابقة. مثلاً في المعادلة التالية:

$$A + 6B \geqslant 12 = \quad A + 6\,(1) = 12 \quad A = 6$$

إذا النقطة M تساوي (6،1) وبتعويض (A,B) للنقطة M بدالة الهدف يكون الناتج كالآتي:

$$Min.\ Z = 4A + 6B = 4(6) + (1) = 30$$

● النقطة W (0، 12) بتعويض هذه القيم في دالة الهدف.

$$Min.Z = 4A + 6B = 4\,(12) + 6\,(0) = 48$$

يمكن تلخيص النتائج السابقة في الجدول (6 ـ 3).

جدول (6 ـ 3) ملخص للنتائج النهائية

النقطة	A	B	القيم (التكاليف)
X	0	9	54
Y	2	3	26
M	6	1	30
W	12	0	48

في هذه الحالة، أفضل قرار يتم اتخاذه هو عند النقطة Y والتي يجب فيها المشروع

أن ينتج وحدتين من العلف الأول وإنتاج ثلاث وحدات من العلف الثاني بحيث يحقق المشروع أقل تكلفة وقدرها 26 ديناراً. أما عن إيجاد الحل عن طريق منحنى دالة الهدف [عن طريق انحدار (ميل) دالة الهدف]، فيمكن افتراض قيم مختلفة في Z وسوف تجد الحل الذي تصل إليه هو نفس الحل الذي توصلنا إليه في المثال السابق.

2 ـ طريقة السيمبليكس (العامة) Simplex Method :

لقد سبق أن أوضحنا كيفية عمل طريقة الرسم البياني وبينت لنا بأن الحل الأمثل للمشكلة يقع في أحد الأركان. بينما تقوم الطريقة العامة بفحص هذه الأركان بطريقة منظمة للوصول إلى ذلك الحل الأمثل، وبالرغم من أنه يمكن استخدام الآلات الحاسبة أو الحاسب الآلي على نطاق واسع في ظل هذه الطريقة، فإنه من المهم أيضاً أن نتعرف على كيفية عمل هذه الطريقة حتى يمكن تفسير الناتج منطقياً. وتعتبر الطريقة العامة التي قدمها دانتزج Dantzig سنة 1947 لحل مجموعة من مشاكل البرمجة الخطية أحد الاكتشافات الرياضية الهامة للقرن العشرين، فهي كطريقة عامة تعتبر من أهم الطرق في هذا المجال وأكثرها كفاءة وفعالية. وقد ساهمت الأبحاث اللاحقة لدانتزج وعدد كبير من الرواد والمفكرين الآخرين مثل كهن. Kuhn H.W وتكر. Tucker A.W وشابلي Slapely L.S. وكارنس .Charnes A وغيرهم، في تطوير الطريقة وتحسينها ورفع مستوى كفاءتها والتغلب على بعض المشاكل التي كانت تحد من سلامة تطبيقها.

وتقوم الطريقة العامة على مبادىء ومفاهيم رياضية متقدمة ومعقدة. غير أنه لا يلزم الإلمام بهذه المبادىء والمفاهيم لأغراض الإلمام بالطريقة ذاتها ومغزاها ودلالاتها. ولحسن الحظ، فهي كطريقة ذات منهجية رياضية منتظمة ترتكز إلى ما يسمى «نهج الاستبعاد الكامل». لجاوس Gauss وجوردن Jordan وهذا النهج لا يستلزم خلفية رياضية متقدمة لاستيعابه بل يكفي الإلمام بقليل من القواعد الجبرية وقواعد جبر المصفوفات البسيطة.

تمتاز هذه الطريقة بفاعليتها نظراً لقدرتها على حل النموذج البرمجي ولعدد غير محدود من المتغيرات، كما تمتاز بإمكانيات برمجتها وذلك عن طريق استخدام الحاسب الآلي لإيجاد الحل الأمثل.

1 ـ إستخدام طريقة السمبليكس (العامة) لحل مشكلة القيمة العظمى

• الشكل المعياري للنموذج Standard Form

قبل البدء باستخدام الطريقة العامة لحل مشكلة التعظيم، لابد من تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الشكل المعياري والذي يتناسب مع القواعد والإجراءات الجبرية المعينة لمشكلة البرمجة الخطية. ولقد كانت الصياغة الرياضية للمشكلة في المثال (1) على الصورة التالية:

دالة الهدف $Max.Z = 10x + 30y$ (القيمة الكبرى)

القيود

$4x + 6y \leqslant 12$ المرحلة الآلية

$8x + 4y \leqslant 16$ المرحلة اليدوية

شرط عدم السلبية

$X,Y \geqslant 0.$

ويتطلب الحل لهذه المشكلة مراعاة الأمور التالية:

1 ـ ضرورة تحويل متباينات القيود الموضوعية من اللامتساويات إلى متساويات، وذلك عن طريق إضافة ما يسمى بالمتغيرات الإضافية **(Slack Variables)** إلى كل اللامتساويات. والمتغيرات الإضافية عبارة عن قيم مجهولة، تضاف إلى الجانب الأيسر من اللامتساويات، لتحويلها إلى متساويات. وهي من الناحية العملية عبارة عن الطاقة غير المستغلة أو العاطلة داخل كل قسم من الأقسام الإنتاجية. ولكن في حالة ما تكون الإشارة (=) فهذا يعني أن الجانب الأيمن يساوي الجانب الأيسر من المعادلة ولا يوجد وقت غير مستغل أو ضائع. ولهذا ليس من الضروري إضافة المتغيرات العشوائية.

مثلاً القيد الأول للمرحلة الآلية تقرأ: أربع ساعات مضروبة في حجم الإنتاج للسلعة الأولى زائد ست ساعات مضروبة في حجم الإنتاج للسلعة الثانية ويجب أن تقل عن، أو تساوي على الأكثر، طاقة المرحلة الآلية التي هي طاقتها 12 ساعة. ولنفرض أن حاصل جمع هذا الضرب كان أقل من طاقة المرحلة الآلية فعلاً، فهذا يعني قطعاً أن المرحلة الآلية سوف تكون فيها طاقة عاطلة، أي أن الطاقة المتاحة في المرحلة سوف تساوي مجموع الاستخدامات في إنتاج السلعتين مضافاً إليها الطاقة العاطلة. وكذلك الأمر للمرحلة الثانية.

وإذا رمزنا للطاقة العاطلة أو غير المستغلة **(SLACK)** في المرحلة الآلية بالرمز S1 وللطاقة العاطلة في المرحلة اليدوية بالرمز S2 فإنه يمكن إعادة صياغة معادلات القيود كالآتي:

$4x + 6y + S1 + 0S2 = 12$ المرحلة الآلية

$8x + 4y + 0\,S1 + S2 = 16$ المرحلة اليدوية

ويطلق على S2,S1 بالمتغيرات الإضافية، أي متغيرات الطاقة العاطلة أو الزائدة عن الاستخدام. فإذا كان حجم الإنتاج الفعلي مثلاً هو $X = 1$ ، $Y = 1$، فإن الطاقة العاطلة في المرحلة الآلية S1 يمكن حسابها كالآتي:

$$4(1) + 6\,(1) + s1 = 12 = 4 + 6 + S1 = 12 = 10 + S1 = 12$$

$$S1 = 12 - 10 = 2$$

وسوف نفترض أن الطاقة ليس لها أي قيمة اقتصادية موجبة أو سالبة، بمعنى أنه لا ينتج عنها أرباح مباشرة كما لا يستدعي وجودها تكاليف مضافة متغيرة. وبذلك يكون الربح للوحدة من S1 = 0 والربح للوحدة من S2 = 0 وإذا ما أضفنا هذين إلى الصيغة الأصلية للمشكلة، مع إهمال القيود التلقائية مؤقتاً لأصبحت المشكلة كالآتي:

دالة الهدف $Max.Z = 10x + 30y + 0\,S1 + 0\,S2$ المرحلة الآلية

القيود

المرحلة الآلية $4x + 6y + S1 + 0\,S2 = 12$

المرحلة اليدوية $8x + 4y + 0\,S1 + S2 = 16$

شروط عدم السلبية

$$X, Y \geqslant 0$$

ولاشك أنه إذا لم يقم المشروع بإنتاج أي شيء، أي بإنتاج $Y = 0, X = 0$، فإن الطاقة العاطلة في المرحلة الآلية سوف تكون كالآتي:

الطاقة المتاحة	12
الطاقة المستغلة	0
الطاقة الغير مستغلة	12

إذا $S1 = 12$ ساعة، بينما في المرحلة اليدوية تكون $S2 = 16$ ساعة. ونحصل على الحل الأساسي الأول (حيث لا إنتاج والطاقات المتاحة عاطلة بالكامل) جبرياً بحل قيدي للمرحلتين آنياً للطاقة العاطلة وهي كالآتي:

$$S1 = 12 = 4X - 6y - 0\,S2$$

$$S2 = 16 = 8X - 4Y - 0\,S1$$

وإذا ما عوضنا عن حجم الإنتاج لكل من $x, y = 0$ في المعادلات السابقة (دالة الهدف ومعادلة القيود) لوجدنا:

$$Z = 4\,(0) + 6\,(0) + 0\,(S1) + 0\,(S2) = 0$$

$$S1 = 12 - 4\,(0) - 6\,(0) - 0 - S2 = 12$$

$$S2 = 16 - 8\,(0) - 4\,(0) - 0 - S1 = 16$$

وعادة ما يكون الحل الأساسي الأول الذي هو أحد سمات نموذج البرمجة الخطية متمثلاً في نقطة الصفر في دالة الهدف، حيث لا أرباح، والطاقة المتاحة عاطلة بالكامل،

وخاصة إذا كانت المشكلة هي مشكلة أقصى الأرباح أو المنافع النمطية.

ملاحظة ـ لعله من الواضح أنه لا يلزم في مشاكل البرمجة الخطية أن يتساوى عدد القيود مع عدد المتغيرات لدى مشكلة معينة. فقد يوجد في المشكلة عدد من الموارد محدودة المقدار أو القدرة يقل كثيراً أو قليلاً عن عدد المنتجات المطلوب اختيار التشكيلة المثالية من بينها.

2 ـ بناء جدول الحل المبدئي للطريقة المبسطة Setting up The Initial Solution

بعد إضافة المتغيرات العاطلة إلى كل من دالة الهدف وقيود المشكلة، وبالتالي تصبح المعادلات على الصورة التالية:

دالة الهدف: $Max.Z = 10x + 30y + 0S1 + 0S2$ (القيمة الكبرى)

القيود:

$4X + 6Y + S1 + 0\,S2 = 12$ المرحلة الآلية

$8X + 4Y + 0\,S1 + S2 = 16$ المرحلة اليدوية

شرط عدم السلبية:

$X, Y, S1, S2 \geqslant 0$

يوجد لدينا في هذه المشكلة أربعة متغيرات ومعادلتان بالإضافة إلى معادلة دالة الهدف. ففي حالة ما تكون طاقة المرحلتين عاطلة بالكامل فسوف تكون النتيجة كالآتي: ساعة $S1 = 12$، $S2 = 16$، $Z = 0$ وحيث إن (S2, S1) متغيرات غير أساسية في الحل الأساسي، (Y, X) متغيرات أساسية، أي مساوية للصفر. نبدأ الآن بتكوين الجدول المبدئي حسب الطريقة العامة (السيمبليكس). وذلك عن طريق تجريد كل من دالة الهدف والمتساويات (القيود) من معاملاتها ووضعها على الصورة المبينة في الجدول (7 ـ 3):

جدول (7 ـ 3) الحل المبدئي الأول

C	Basic	10	30	0	0	قيم الحل
	●	X	Y	S1	S2	RHS
0	S1	4	6	1	0	12⟵
0	S2	8	4	0	1	16
	Z	0	0	0	0	0
	C-Z	10	[illegible]↑	0	0	

نلاحظ ما بداخل الجدول هو عبارة عن وجود مصفوفتين مضروبتين في بعضهما البعض، الأولى هي المصفوفة الممثلة للمشكلة المراد حلها، والثانية عبارة عن مصفوفة

الوحدة، التي تناظر الواحد في الأعداد الطبيعية. وهذا يعني أن إضافة المتغيرات العشوائية إلى اللامتساويات لن تؤثر على الحل النهائي للمشكلة، وهي فقط عبارة عن تحايل رياضي للحصول على الحل المبدئي الذي يعني أن قيم كل من (Y,X) مساوية للصفر.

ويمثل صف الهدف C في قمة الجدول معاملات المتغيرات في دالة الهدف، كما في دالة الهدف $(Max.Z = 10x + 30y + 0S1 + 0S2)$ فهي بالنسبة للمتغير $X = 10$ وللمتغير $Y = 30$ كما يمثل **العمود** الأول المعنون C معاملات المتغيرات التي توجد في الحل الأساسي من دالة الهدف، فنجد أن معامل $S2, S1 = 0$

ويمثل العمود المعنون (●) عمود متغيرات الحل الأساسي، وهي بالنسبة للحل الأساسي الأول المشكلة ● = S1,S2.

ويمثل العمود Right hand side (RHS) قيم المتغيرات الموجودة في الحل الأساسي، فالمتغير $S1 = 12, S_2 = 16$. ويمثل باقي الأرقام في المصفوفة تحت المتغيرات (X,Y, S1, S2) في الصفين الأول والثاني، معاملات الاستخدام من واقع معادلات القيود:

$$4X + 6Y + S1 + 0S2 = 12$$

$$8X + 4Y + 0S1 + S2 = 16$$

أما بالنسبة لعمود النسب فسوف يتضح مغزاه وكيفية الحصول عليه على الأرقام الظاهرة فيه حالاً. (القاعدة الثانية).

3 ـ كيفية الحصول على قيم الصف (C-Z):

يقوم صف المؤشرات (C-Z) مقام دفة السفينة في الطريقة العامة (السيمبليكس)، حيث يوجه إلى الخطوات التالية الواجب اتخاذها للتوصل إلى الهدف المنشود. ويتم الحصول على الأرقام التي تظهر جبرياً كالآتي:

I ـ حساب الصف Z

تقوم بضرب معاملات الهدف للمتغيرات التي تظهر في الحل الأساسي كما تظهر في العمود C في العناصر المقابلة في كل عمود من أعمدة مصفوفة الاحتياجات (معاملات الاستخدام)، أي مصفوفة معاملات المتغيرات. فحاصل ضرب العمود C في أعمدة المعاملات، ويتم طريقة حساب هذه المعاملات كما في الجدول (8 ـ 3).

جدول (8 ـ 3) حساب المعاملات

المتغير	الربح/الوحدة	الربح الضائع/الوحدة	Z	صافي الربح/الوحدة (C-Z)
X	10	(4*0 + 8*0)	0	10
Y	30	(6*0 + 4*0)	0	30
S1	0	(1*0 + 0*0)	0	0
S2	0	(0*0 + 1*0)	0	0

II ـ حساب الصف (C-Z)

نقوم بطرح حصيلة الضرب في الخطوات السابقة من معامل المتغير في الصف C وهو صف الهدف. أي من ربح المتغير في دالة الهدف، ونضع حصيلة الطرح أسفل عمود معاملات المتغير المعين، أي في وصف المؤشرات (C-Z) وهي مبينة في الجدول (8 ـ 3). بالنسبة (RHS) نقوم بضرب العمود C في العمود (RHS) ونضع حصيلة الضرب في أسفل العمود في صف Z. ويوضح هذا الرقم حصيلة الأرباح أو العائد الذي تحقق بالحل الأساسي، ففي حالة الجدول المبدئي دائماً يكون الناتج يساوي صفراً $[0 = (0*16 + 0*12)]$.

4 ـ كيفية تحديد العمود الأمثل (Optimum Column) والصف الأمثل (Optimum Row):

أ ـ تحديد العمود الأمثل ـ إذا وجدت في الصف (C-Z) أرقاماً موجبة في ما عدا العمود (RHS) فيجب اختيار أكبر القيم، ونميز هذا العمود الذي يقع في قاعدته هذا الرقم وهو يعتبر العمود الأمثل، وقد ميزناه بسهم في جدول الحل الأساسي الأول. ففي حالة عدم وجود أرقام موجبة في الصف (C-Z)، في ما عدا العمود (RHS)، فهذا يعني بأننا توصلنا إلى الحل الأساسي الأمثل في حالة ما تكون المشكلة هي البحث عن أعلى ربح ممكن. والواقع أن تطبيق هذه القاعدة على الحل الأساسي الأول يعني اختيار السلعة التي تحقق أعلى ربح لإدخالها في برنامج الإنتاج، أي في متغيرات الحل الأساسي. ففي مثالنا السابق وجدنا بأن Y هو المتغير الأكثر ربحية والذي يصبح من الواجب تقديمه أو استبداله Replaced Variable في الحل الأساسي في الخطوة الثانية. وتصبح المشكلة هي تحديد عدد الوحدات الواجب إدخالها في الحل الأساسي لهذا المتغير.

ب ـ تحديد الصف الأمثل ـ يتم حساب النسبة الموجبة بين عناصر العمود (RHS) في الحل الأساسي والعمود الأمثل (عمود البؤرة). ويتم اختيار النسبة التي تمثل أصغر نسبة، ثم تمييز هذا الصف الذي تقع فيه هذه النسبة ويمثل هذا الصف بالصف الأمثل. ولا يعتد بالنسبة التي يكون فيها المقام مساوياً للصفر حيث إنها غير معرفة رياضياً، ولأنها تعني عدم وجود علاقة بين المتغير في العمود الأمثل والعمود (RHS).

ويتطبيق هذه القاعدة على الحل في الجدول المبدئي نجد أن الصف الأمثل هو صف S1، وقد ميزناه بسهم. ويتقاطع الصف الأمثل مع العمود الأمثل عند عنصر يسمى (عنصر البؤرة Pivot Element) والذي يظهر محاطاً بمربع في جدول الجدول المبدئي.

5 ـ الانتقال إلى الحل الأساسي الثاني:

بعد تحديد العمود والصف الأمثل، تأتي مرحلة إيجاد قيم الصف الجديد المترتب على عملية الاستبدال، وذلك بقسمة جميع عناصر الصف الأمثل على قيمة عنصر المرتكز أو البؤرة Pivot Element والتي تساوي هذه القيمة (6)، وذلك لكي نصل إلى الصف الجديد الذي يحل محل الصف الأمثل ويقع مكانه في جدول الحل الأساسي الجديد. ويحل المتغير Y الذي يرتبط بالعمود الأمثل في الجدول السابق، محل المتغير في الصف الأمثل عند تحديد متغيرات الحل الأساسي في الجدول الجديد. أي أن Y تحل محل S1 في العمود (●) (وهو عمود المتغيرات الموجودة في الحل) في جدول الحل الأساسي الثاني. كما تحل ربحية المتغير الموجود في الحل في (●) في العمود C محل الربح للمتغير المستبعد (يحل ربح Y محل ربح S1) أنظر الجدول (9 ـ 3).

جدول (9 ـ 3) الجدول المبدئي

قيم الحل	0	0	30	10	Basic	C
RHS	S2	S1	Y	X	●	
12	0	1	6	4	S1	0
16	1	0	4	8	S2	0
0	0	0	0	0	Z	
	0	0	30	10	C-Z	

قيم أو عناصر الصف الأول الجديد = جميع قيم الصف الأمثل ÷ قيمة المرتكز أو البؤرة Pivot

عناصر الصف الجديد داخل الجدول (10 ـ 3)

قيم الحل	0	0	30	10	Basic	C
RHS	S2	S1	Y	X	●	
2	0	1/6	1	2/3	Y	30
					S2	0
					Z	
					C-Z	

والخطوة التالية هي استكمال بقية قيم الجدول، لتحديد قيم الصف الثاني الجديد، وذلك عن طريق استخدام القانون التالي:

قيم الصف الثاني الجديد =
عناصر الصف القديم - (نقطة تقاطع الصف القديم مع العمود الأمثل X عناصر الصف الجديد)

جدول (11 ـ 3) حساب قيم الصف الثاني الجديد

قيم الصف الثاني الجديد	عناصر الصف الجديد	نقطة تقاطع الصف القديم مع العمود الأمثل	عناصر الصف القديم
16/3 =	2/3)	x (4	8 -
0 =	1)	x (4	4-
-2/3 =	1/6)	x (4	0-
1 =	0)	x (4	1-
8 =	2)	x (4	16-

يمكن الآن إدراج هذه القيم في جدول الحل الأساسي (12 ـ 3)

جدول (12 ـ 3) الحل الأساسي الثاني

قيم الحل	0	0	30	10	Basic	C
RHS	S2	S1	Y	X	●	
2	0	1/6	1	2/3	Y	30
8	1	-2/3	0	16/3	S2	0
					Z	
					C-Z	

يتبقى إذن إيجاد معاملات دالة الهدف التي تقع إلى يمين Z وكذلك قيم (C - Z) وهي كما هو مبين في الجدول (13 ـ 3).

جدول (13 ـ 3) عناصر أو قيم الصف (Z)& (C-Z)

المتغير	الربح/الوحدة	الربح الضائع/الوحدة	صافي الربح/الوحدة Z	عناصر أو قيم (C-Z)
X	10 -	(2/3 (30) + 16/3 (0)) =	20	(10-20) = -10
Y	30 -	(1(30) + 0(0)) =	30	(30-30) = 0
S1	0 -	(1/6 (30) + -2/3 (0))0 =	5	(0-5) = -5
S2	0 -	(0(30) + 1(0)) 0 =	0	(0-0) = 0

إذاً الجدول النهائي (14 ـ 3) الذي يمثل الحل الثاني هو كالآتي:

جدول (14 ـ 3) الحل الثاني (الأمثل)

قيم الحل	0	0	30	10	Basic	C
RHS	S2	S1	Y	X	●	
2	0	1/6	1	2/3	Y	30
8	1	-2/3	0	16/3	S2	0
60	0	5	30	20	Z	
	0	-5	0	-10	C-Z	

6 ـ **جدول الحل الأمثل:**

يتضح من الجدول السابق أننا توصلنا إلى الحل الأمثل، حيث كل المؤشرات في صف (C-Z) صفرية أو سالبة. ويوضح عمود المتغيرات الموجودة في الحل (●) تشكيلة الإنتاج المثالية ويوضح العمود RHS كمياتها، كما يوضح حصيلة الأرباح المباشرة المثالية (أسفل العمود) وهي كالآتي: ديناراً $Z = 60$، وحدتان $Y = 2$ والمتغير Y هو المتغير الموجود في الحل. كما يتضح أن الطاقة المتاحة مستغلة بالكامل S1، والتي ترمز للطاقة العاطلة في المرحلة الآلية. بينما الطاقة المتاحة لم تستغل استغلالاً كلياً حيث $S2 = 8$ والتي ترمز للطاقة العاطلة في المرحلة اليدوية. وهذه نفس النتيجة التي تم التوصل إليها باستخدام طريقة الرسم البياني.

ملخص خطوات الطريقة المبسطة لحل مشاكل القيمة العظمى:

1 ـ ضع المشكلة في صورة نموذج للبرمجة الخطية.

2 ـ حوّل اللامتساويات إلى متساويات وذلك بإضافة المتغيرات العشوائية.

3 ـ جرد المتساويات من معاملاتها مكوناً جدول الطريقة المبسطة.

4 ـ أوجد الحل المبدئي للمشكلة.

5 ـ إفحص في ما إذا كان الحل الحالي هو الحل الأمثل (كل معاملات الصف (C-Z) أقل من أو تساوي الصفر) أم لا. فإذا كان نعم... تكون المشكلة قد حلت، وإذا كان لا... إبحث عن الحل الأفضل، وذلك كما يلي:

- حدد العمود الأمثل، وهو الذي يقابل أكبر قيمة موجبة من معاملات الصف (C-Z)
- حدد الصف الأمثل الذي يجب استبداله، وهو عبارة عن الصف الذي يقابل أقل قيمة ناتجة من قسمة الطرف الأيمن للمتساويات على عناصر العمود الأمثل.
- أوجد الصف الجديد الذي يحل محل الصف المستبدل.
- أوجد بقية الصفوف الأخرى التي تلي الصف الجديد المحدد، وذلك بطرح (عناصر الصف الجديد، مضروباً في نقط تقاطع الصفوف القديمة مع العمود الأمثل) من عناصر الصفوف القديمة.
- يكون الجدول الذي يتم التوصل إليه بعد الانتهاء من الخطوة السابقة، ممثلاً للحل الأفضل الذي بدىء في البحث عنه، إعتباراً من النقطة الأولى.

6 ـ إفحص الحل الذي تم التوصل إليه، لمعرفة ما إذا كان يمثل الحل الأمثل أم لا. فإذا كان نعم تكون المشكلة قد حلت، وإذا كان لا... كرر ما جاء في الخطوة (5)، وهكذا حتى تصل إلى الحل الأمثل.

II ـ إستخدام طريقة السيمبليكس (العامة) لحل مشكلة القيمة الصغرى

بعد دراسة ميكانيكية الطريقة العامة (السيمبليكس) في حل مشاكل البرمجة الخطية التي يكون الهدف فيها هو البحث عن القيمة العظمى Maximization أو أعلى ربح أو منافع ممكنة، فقد أصبح من الواجب علينا التعرف على هذه الميكانيكية في حالة ما إذا كان الهدف هو البحث عن أقل تكلفة أو تضحية ممكنة. ذلك لأن العديد من مشاكل الحياة العملية يكون الهدف فيها هو اتخاذ قرار يتعلق بتخفيض التكاليف أو التضحيات في سبيل تحقيق أهداف أو شروط أو منافع أخرى. لذلك نسوق المثال التالي (مثال 2 السابق):

دالة الهدف: $Min.Z = 4A + 6B$ (القيمة الصغرى)

القيود: $3A + B \geqslant 9$ بروتينات

$A + 2B \geqslant 8$ أملاح البوتاسيوم

$A + 6B \geqslant 12$ أملاح الكالسيوم

شرط عدم السلبية: $A,B \geqslant 0$

الحل

يتطلب حل هذا المثال بواسطة الطريقة العامة (السيمبليكس) تحويل المتباينات من اللامتساويات إلى متساويات. وذلك عن طريق إضافة المتغيرات الإضافية Slack Variable (المتغيرات الاصطناعية Artificial Variable أو الثانوية) إلى القيود ودالة الهدف. ولكن بتفحص هذا المثال، نلاحظ أن هناك إشارة أكبر من أو تساوي (≽) ولهذا يتطلب معالجة خاصة، حتى يمكن تحويل اللامتساويات إلى متساويات. حيث نلاحظ أن الطرف الأيسر قد يساوي، وقد يكون أكبر من الطرف الأيمن لها، لذلك في حالة تحويل هذه اللامتساويات إلى متساويات ـ فإنه يجب طرح الفائض (Surplus) من الطرف الأيسر،

وليس إضافة المتغير الإضافي كما سبق ذكره في المثال (1) للقيمة العظمى، الذي يضاف عندما تكون اللامتساويات تحمل إشارة أقل من أو تساوي ($\leqslant$) لذلك في هذا المثال، نرمز لهذه الزيادة المطلوب طرحها في القيد الأول والثاني والثالث (S1, S2, S3). ويكون الشكل الذي عليه اللامتساوية بعد طرح الفائض كالآتي:

القيود:

$$3A + B - S1 - 0S2 - 0S3 = 9 \quad \text{بروتينات}$$

$$A + 2B - 0S1 - S2 - 0S3 = 8 \quad \text{أملاح البوتاسيوم}$$

$$A + - 0S1 - 0S2 - S3 = 12 \quad \text{أملاح الكالسيوم}$$

فمثلاً في المعادلة الأولى، هذه المتساوية تكون صحيحة إذا كانت (3A + B) أكبر من S1، أما إذا كانت S1 أكبر من (3A + B) أو كانتا متساويتين فإن هذه المتساوية لا تنطبق. فإذا افترضنا، كما كنا نعمل عند إيجاد الحل المبدئي، أن A, B تساويان الصفر، فإن:

$$3(0) + 0 - S1 - 0S2 - 0S3 = 9$$

$$0 + 0 - S1 - 0 - 0 = 9$$

$$-S1 = 9$$

ولكن هذا غير مقبول من الناحية الرياضية، ولذلك فإنه تضاف قيمة أخرى، تسمى المتغير الاصطناعي Artificial Variable، والذي يمكن التغلب على هذه المشكلة الرياضية، وهو عبارة عن مادة، أو ثروة. غير أن تكلفة الوحدة منه مرتفعة جداً (M) ولتكن مثلاً (دينار 100 = M). فإذا رمزنا لهذا المتغير الاصطناعي بالرمز D1 في المتباينة الأولى، وهذا المتغير عنصر وهمي ليس له وجود فعلاً، ولا يجوز أن ينطوي عليه الحل الأمثل للمشكلة، ولذلك فقد افترضنا أن تكلفته مرتفعة جداً لتضمن عدم دخوله بين تركيبة العناصر المثالية. فإن المتساوية السابقة تأخذ الشكل التالي:

$$3A + B - S1 + D1 - 0S2 - 0S3 = 9$$

وبذلك تكون دالة الهدف والقيود لهذه المشكلة بعد تعديلها كالآتي:

$$\text{Min. } Z = 4A + 6B - 0S1 - 0S2 - 0S3 + 100\,D1 + 100\,D2 + D3$$

القيود:

$$3A + B - S1 + D1 = 9 \quad \text{بروتينات}$$

$$A + 2B - S2 + D2 = 8 \quad \text{أملاح البوتاسيوم}$$

$$A + 6B - S3 + D3 = 12 \quad \text{أملاح الكالسيوم}$$

شرط عدم السلبية: $A, B, S1, S2, S3, D1, D2, D3 \geqslant 0$

وبذلك يكون الحل الأساسي الأول مكوناً من D1 = 9, D2 = 8, D3 = 12 وباقي المتغيرات غير أساسية. إذاً جدول الحل المبدئي (15 ـ 3) يكون كالآتي:

جدول (15 ـ 3) الحل المبدئي للقيمة الصغرى

C	Basic	4	6	0	M	0	M	0	M	قيم الحل
	•	A	B	S1	D1	S2	D2	S3	D3	RHS
M	D1	3	1	-1	1	0	0	0	0	9
M	D2	1	2	0	0	-1	1	0	0	8
M	D3	1	6	0	0	0	0	-1	1	12
	Z	5M	9M	-M	M	-M	M	-M	M	29 M
	C-Z	4-5M	6-9M	M	0	M	0	M	0	

من خلال جدول الحل المبدئي (15 ـ 3) نجد أن الحل الأساسي يتضمن المتغيرات الوهمية (D1,D2, D3) كما أن تكلفة هذا الحل مرتفعة جداً (2900) دينار، وهذا يدفعنا إلى العمل على تخفيضها. ويتم ذلك عن طريق استبعاد المتغيرات الوهمية ذات التكاليف المرتفعة من الحل المبدئي. وتقوم طريقة السيمبلكس بتحقيق ذلك تلقائياً إذا كان للمشكلة حل ممكن. ولضمان هذه التلقائية قمنا بافتراض تكلفة مرتفعة جداً للوحدة من المتغيرات الوهمية. لاحظ أن المتغيرات الوهمية ليس لها وجود حقيقي في المشكلة ولا يمكن للحل الأمثل أن يتضمن أية قيمة موجبة أو سالبة لأي منها. والهدف منها هو المساعدة في التخلص من مأزق السلبية بضمان ضرورة استبعادها من الحل الأمثل إن وجد، أما إذا لم يمكن التخلص من أي منها فهذا يعني أنه لا يوجد للمشكلة حل ممكن. الآن يمكن حل هذه المشكلة باتباع إحدى الطرق التالية:

1 ـ حل مشكلة القيمة الصغرى بواسطة إجراءات القيمة العظمى:

عن طريق ضرب دالة الهدف في (1 ـ) يتغير الهدف من القيمة الصغرى إلى قيمة عظمى. وتتبع نفس الإجراءات والقواعد التي استخدمناها في تطوير مشكلة القيمة العظمى السابقة (مثال 1). وذلك لأن Minimize (Z) هي Maximise (-Z).

2 ـ إستخدام إجراءات وقواعد القيمة الصغرى، هي كما يلي:

في مشكلة القيمة العظمى ـ كان العمود الأمثل هو العمود الذي يقابل أكبر قيمة موجبة من معاملات دالة الهدف. وفي مشكلة القيمة الصغرى، نجد أن العمود الأمثل هو العمود المقابل لأكبر قيمة سالبة من معاملات دالة الهدف. ففي الاستخدام الثاني يتم الوصول إلى الحل الأمثل، عندما تكون كل قيم معاملات دالة الهدف أكبر من أو تساوي

الصفر (0 ≥)، وليس أقل من أو تساوي الصفر (0 ≤)، كما كان في حالة التعظيم، ويتم تطوير الحل للمثال السابق كما يلي:

الجدول المبدئي لمشكلة التقليل يكون على الصورة التالية في الجدول (16 ـ 3) بعد افتراض أن (M = 100) العمود الأمثل في هذه الحالة يمثل أكبر قيمة سالبة، والصف الأمثل يمثل أقل قيمة أو نسبة موجبة في العمود (RHS)، وهذا الأمر لا يختلف عن حسابه في مشكلة القيمة العظمى وكذلك كل باقي الإجراءات اللازمة للانتقال من حل أساسي إلى آخر تظل كما هي:

جدول الحل المبدئي (16 ـ 3)

C	Basic	4	6	0	100	0	100	0	100	قيم الحل
	●	A	B	S1	D1	S2	D2	S3	D3	RHS
100	D1	3	1	-1	1	0	0	0	0	9
100	D2	1	2	0	0	-1	1	0	0	8
100	D3	1	6	0	0	0	0	-1	1	12 ←
	Z	500	9030	-100	100	-100	100	-100	100	2900
	C-Z	-496	-892 ↑	100	0	100	0	100	0	

في هذا الجدول الصف الأمثل هو الصف الذي يمثل (D3) وأن معامل B مع D3 هو عنصر المرتكز أو البؤرة Pivot وبقسمة هذا الصف على (6) وهي قيمة البؤرة واستبدال D3 بالمتغير B فنحصل على الصف B الجديد في الجدول (17 ـ 3) (18 ـ 3).

الجدول الثاني (17 ـ 3)

C	Basic	4	6	0	100	0	100	0	100	قيم الحل
	●	A	B	S1	D1	S2	D2	S3	D3	RHS
6	B	1/6	1	0	0	0	0	-1,6	1,6	2
100	D1	$\frac{17}{6}$	0	-1	1	0	0	$\frac{1}{6}$	-1/6	7
100	D2	$\frac{2}{3}$	0	0	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	-1/3	4
	Z	346 0	6	-100	100	-100	100	49	-49	1112
	C-Z	-446.9	0	100	0	100	0	-49	149	

الجدول الثالث (18 ـ 3)

C	Basic	4	6	0	100	0	100	0	100	قيم الحل
	●	A	B	S1	D1	S2	D2	S3	D3	RHS
4	A	1	0	-6/17	6/17	0	0	1/17	-1/17	42/17
6	B	0	1	1/17	-1/17	0	0	-3/17	3/17	27/17
100	D2	0	0	4/17	-4/17	-1	1	5/17	-5/17	40/17
	Z	4	6	382/17	-382/17	-100	100	486/17	-486/17	4330/17
	C-Z	0	0	-382/17	2082/17	100	0	-486/17	2186/17	

الجدول الرابع (الأمثل) (19 ـ 3)

C	Basic	4	6	0	100	0	100	0	100	قيم الحل
	●	A	B	S1	D1	S2	D2	S3	D3	RHS
0	S3	0	0	4/5	-4/5	-17/5	17/5	1	-1	8
4	A	1	0	-2/5	2/5	1/5	-1/5	0	0	2
6	B	0	1	1/5	-1/5	-3/5	3/5	0	0	3
	Z	4	6	-2/5	2/5	-14/5	14/5	0	0	26
	C-Z	0	0	2/5	498/5	14/5	486/5	0	100	

وهذا الجدول (19 ـ 3) هو جدول الحل الأمثل حيث إن الصف (C-Z) لا توجد فيه قيم سالبة، وتفسير هذا الحل هو أن ينتج المصنع وحدتين من النوع (A) وثلاث وحدات من النوع (B) ويتكبد المصنع أقل تكلفة ممكنة وهي 26 ديناراً.

■ تحليل الحساسية Sensitively Analysis:

يقصد بتحليل الحساسية تحديد المدة التي يمكن أن تتقلب أو تتغير في حدودها معاملات وثوابت النموذج دون تأثيرها على قيم المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل. وسوف نستعرض في هذا الجزء تحليل الحساسية وذلك من خلال:

1 ـ **التغير في الطرف الأيمن للمعادلات Right-Hand-Side Ranging**

2 ـ **التغير في معاملات دالة الهدف Changes in the Objective Function Coefficients**

وسوف نستعرض هذا التحليل من خلال المثال (3):

(مثال 3): نفرض أن مشروعاً معيناً متخصص في أعمال الطلاء الداخلي والخارجي للبيوت وأنه يستخدم مادتان (A, B) لتصنيع الدهان الداخلي والخارجي وأن أعلى كمية

يمكن أن تتوفر من A هي 6 أطنان ومن B هي 8 أطنان، وأن المتطلبات اليومية من الدهان الخارجي والداخلي معطاة في الجدول (20 ـ 3).

جدول (20 ـ 3)

أنواع المواد الخام	المواد الخام بالأطنان لكل طن من الطلاء: الطلب الخارجي Exterior	الطلب الداخلي Interior	الطاقة المتاحة
Raw Material A	1	2	6
Raw Material B	2	1	8

علماً بأن المطلوب من الطلاء الداخلي لا يزيد عن المطلوب من الطلاء الخارجي بطن واحد وأن أعلى مطلوب من الطلاء الداخلي لا يتعدى 2 طن، وأن سعر الطن الواحد من الطلاء الداخلي 2000 دينار. والخارجي 3000 دينار. والمطلوب إيجاد كمية كل من نوعي الطلاء.

الحل

نفرض أن كمية الطلاء الخارجي Xe والداخلي Xi، ومن خلال ما سبق يمكن بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة بحيث يظهر هذا النموذج كما يلي:

دالة الهدف: $Max.\ Z = 3Xe + 2Xi$ (القيمة الكبرى)

القيود:

$Xe + 2Xi \leqslant 6$ المواد الخام A

$2Xe + Xi \leqslant 8$ المواد الخام B

$-Xe + Xi \leqslant 1$ الطلب

$Xi \leqslant 2$ الطلب

شرط عدم السلبية:

$Xe, Xi \geqslant 0$

أما الشكل المعياري لهذا النموذج فيأخذ الشكل التالي:

دالة الهدف: $Max.\ Z = 2x + 3y + 0S1 + 0S2 + 0S3 + 0S4$ (القيمة الكبرى)

القيود:

$Xe + 2Xi + S1 + 0S2 + 0S3 + 0S4 = 6$ المواد الخام A

$2Xe + Xi + 0S1 + S2 + 0S3 + 0S4 = 8$ المواد الخام B

$-Xe + Xi + 0S1 + 0S2 + S3 + 0S4 = 1$ الطلب

$Xi + 0S1 + 0S2 + 0S3 + S4 = 2$ الطلب

شرط عدم السلبية:

$Xe, Xi, S1, S2, S3, S4 \geqslant 0$

وباستخدام الطريقة العامة يمكن الحصول على جدول الحل الأمثل

جدول (21 ـ 3) الحل الأمثل

C	Basic	3	2	0	0	0	0	قيم الحل
	•	Xe	Xi	S1	S2	S3	S4	RHS
2	Xi	0	1	2/3	-1/3	0	0	1 1/3
3	Xe	1	0	-1/3	2/3	0	0	3 1/3
0	S3	0	0	-1	1	1	0	3
0	S4	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3
	Z	3	2	-1/3	-4/3	0	0	12 2/3
	C-Z	0	0	1/3	4/3	0	0	

ومن خلال استعراض هذا الجدول (21 ـ 3) يمكن بيان الحل الأمثل وذلك بتحديد قيمة دالة الهدف والكمية المطلوبة من Xe, Xi لتحقيق الهدف بأيصاله إلى القيمة المطلوبة بدون الرجوع إلى باقي المناصر (S3, S4) وبهذا يمكن صياغة الحل الأمثل بالشكل (22 ـ 3).

جدول (22 ـ 3) ملخص للنتائج

متغيرات القرار	القيمة المثلى	القرار
Xe	3 1/3	إنتاج 3 1/3 طناً من الطلاء الخارجي
Xi	1 1/3	إنتاج 1 1/3 طناً من الطلاء الداخلي
Z	12 2/3	الأرباح الناتجة تكون 12 2/3 ألفاً من الأطنان

1 ـ التغير في الطرف الأيمن للمعادلات Right-Hand-Side Ranging:

إذا أردنا أن نتعرف على أثر الزيادة أو النقص في الطاقة الإنتاجية للمواد الخام A, B بساعة واحدة على الربح (Z)، يمكن الإجابة على هذا السؤال من خلال جدول الحل (21 ـ 3)، وذلك بالنظر إلى معامل دالة الهدف في C-Z الذي يقابل الرمز (S1) وهو C-Z الذي يقابل الرمز (S1) وهو 1/3 بمعنى أن كل زيادة أو نقص للطاقة المتاحة بمقدار طن من المواد الخام A سوف يزيد أو يخفض الأرباح بمقدار 1/3 دينار. وبنفس المنطلق ـ فإن زيادة الطاقة المتاحة من المواد الخام B بطن واحد يزيد الأرباح بمقدار 4/3 ديناراً، وتخفيضها بطن واحد سيخفض الأرباح بنفس القيمة. ولكن ماذا عن الزيادة على الطلب في المعادلة الثالثة؟ بالنظر إلى معاملة دالة الهدف والتي تقابل (S3)، نلاحظ وجود قيمة صفر، مما يعني أن زيادة الطلب لن تؤثر بشيء على الأرباح، وهذه في الواقع حقيقة، وذلك لأنه ـ وبتفحص الحل الأمثل ـ نلاحظ أنه يترتب عنه وجود (3) أطنان غير مستغلة

في معادلة الطلب. وبالتالي ـ فإن الزيادة في الأطنان في هذه المعادلة ستضاف إلى الأطنان غير المستغلة منه، ولن تؤثر على الأرباح بشيء، وهذا الإجراء ينطبق على المعادلة الرابعة للطلب. وهذه القيم الأربع (0، 0، 4/3، 1/3) تسمى أسعار الظل Shadow Prices.

من خلال ذلك، نستطيع أن نقول بأن الأرباح سوف تزداد أو تنخفض بتلك القيم لأسعار الظل، وذلك نتيجة لزيادة أو انخفاض الطاقة المتاحة من المواد الخام وكذلك الطلب ـ السؤال هنا: ما هو عدد الأطنان التي يمكن استخدامها والطلب عليها، مع المحافظة أو الإبقاء على تحقيق هذه الزيادة في الأرباح؟ وهو ما يعرف بالمدى الذي في إطاره تبقى ظلال الأسعار سارية المفعول The Range, Over Which The Shadow Prices Remain Valid وذلك لأنه لا يمكن زيادة هذه الطاقات المتاحة باستمرار، أو بدون وجود حدود معينة لهذه الزيادات. وبتحديد هذا المدى، فإننا سنتبع خطوات مشابهة للخطوات التي كنا نتبعها في تحديد الصف المستبدل، وذلك كما يلي:

أولاً: بالنسبة لزيادة الطاقة المتاحة للمواد الخام، A يمكن تحديد مدى هذه الزيادة، وذلك بقسمة الطرف الأيمن للمعادلات على عناصر العمود (S1)، كما في الجدول (23 ـ 3).

جدول (23 ـ 3) مقدار الزيادة

(1)	S1 (2)	(3)
الطرف الأيمن من الحل الأمثل RHS	عناصر العمود	قسمة (1) على (2) RHS/S1
11/3	2/3	2
3 1/3	-1/3	-10
3	-1	-3
2/3	-2/3	-1

إن أقل قيمة موجبة (2) تمثل القدر المتاح من الأطنان الذي به يمكن تخفيض الطاقة المتاحة من المواد الخام A، وتمثل أقل قيمة سالبة (1) القدر المتاح من الأطنان الذي به يمكن زيادة الطلب في المعادلة الرابعة. ونظراً لأن الطاقة المتاحة الأصلية التي ابتدئت بها المواد الخام A، هي (6) أطنان، فإن حدود الزيادة في هذه الطاقة هي: (6 ـ 2) إلى (6 + 1) أي من 4 إلى 7 أطنان من المواد الخام A.

وبنفس المنطق، يمكن تحديد المدى الذي به يمكن زيادة الطاقة للمواد الخام B، مع المحافظة على بقاء ظل التكلفة (4/3) ساري المفعول.

جدول (24 ـ 3) يبين مدى زيادة الطاقة المتاحة

(1)	(2)	(3)
الطرف الأيمن من الحل الأمثل RHS	عناصر العمود S2	قسمة 1 على 2 RHS/S2
$1\frac{1}{3}$	-1/3	-4/3
$3\frac{1}{3}$	2/3	5
3	1	3
2/3	1/3	3

يتضح أن أقل قيمة موجبة هي (3)، وهي تعبر عن القدر من الأطنان الذي به يمكن الطاقة المتاحة للمواد الخام A. وتعبر أقل قيمة سالبة (4/3 ـ) عن تخفيض قدر من الأطنان الذي به يمكن زيادة الطاقة المتاحة للمواد الخام B، ويكون مدى الزيادة:

ونظراً لأن الطاقة المتاحة الأصلية (التي ابتدىء بها) للمواد الخام B هي (8) أطنان، فإن مدى الزيادة هو (5 ـ 8) إلى (4/3 + 8) أي من (3) إلى (9.3) أطنان. أما في ما يتعلق بالطلب في المعادلة الثالثة والرابعة ـ فإنه، وكما سبقت الإشارة، هناك (3)، (2/3) طن غير مستغلة في هاتين المعادلتين، وهذا المقدار من الأطنان يمثل الطلب الذي به يمكن تخفيض الطاقة المتاحة للطلبات، قبل أن يحدث أي نقص في الوقت المطلوب للطلبيات. ونظراً لأنه لم يتم استخدام كل الأطنان لتغطية الطلب، فإنه يمكن زيادتها بشكل مطلق، دون التأثير على حل المشكلة. وعلى ذلك، فإن حدود الزيادة هي (3 ـ 1) إلى (مالا نهاية + 1) أي من (2 ـ إلى ما لا نهاية).

أما من حيث المصادر فيمكن تقسيمها إلى نوعين: ـ غير كافية (Not Sufficient) ووفيرة (Abundant) وذلك اعتماداً على استهلاكها أو عدم استهلاكها كاملاً للوصول إلى الهدف. ويمكن الحصول على المعلومات اللازمة عن المصادر من خلال الرجوع إلى جدول الحل النهائي؛ فمثلاً المادة (A)، القيد الأول، هي من النوع غير الكافي نظراً لأن (S1 + 0) وكذلك الحال بالنسبة للمصدر الثاني (B)، وبهذا فإن زيادة هذه المصادر سوف تؤثر إيجابياً على قيمة دالة الهدف. أما القيود (المصادر) التي تحتوي على متغيرات أساسية موجبة القيمة فإنها تكون فائضة وأن زيادتها لا تؤثر على دالة الهدف بل تزيد من حالة الفيضان التي تقع فيها. ومن خلال جدول الحل (20 ـ 3) يمكن إظهار حالة المصادر كما في الجدول (25 ـ 3).

جدول (25 ـ 3) حالة المصادر

Resource الموارد	Slack	Status of Resource مكانة الموارد
المواد الخام (A)	S1 = 0	Not Sufficient غير كافية
المواد الخام (B)	S2 = 0	Not Sufficient غير كافية
Limit on Excess of Interior over exterior paint	S3 = 3	Abundant وفرة
Limit on Demand for interior paint	S4 = 2/3	Abundant وفرة

تعرّف وحدة تقييم (Unit Worth) المصدر بأنها مقدار الزيادة التي يمكن أن تطرأ على دالة الهدف نتيجة زيادة المصدر وحدة واحدة، ويمكن الحصول على وحدات تقييم المصادر من خلال جدول الحل وبالذات من معادلة Z في الجدول (قيم S1, S2, S3, S4) فمثلاً وحدة تقييم المصدر الأول تساوي $\frac{1}{3}$ أو بمعنى آخر فإن زيادة المصدر الأول وحدة واحدة سوف يزيد. قيمة الفائدة بمقدار $\frac{1}{3}$ وبهذا يمكن عرض معادلة Z اعتماداً على هذه الوحدات.

$$Z = 12\ 2/3 - (1/3\ S1 + 4/3\ S2 + 0S3 + 0S4)$$

نلاحظ من هذه المعادلة أن زيادة S1 تقلل قيمة Z ولكن في نفس الوقت تحقق فائدة وذلك بالإقلال من المادة (A).

$$Xe + 2Xi + S1 = 6$$

لاحظ أن المصادر S3, S4 لا تؤثر على الهدف لا بالزيادة ولا بالنقصان.

يرتبط كل مصدر من المصادر بمتغير أساسي فمثلاً المادة (A)، القيد الأول، يرتبط بالمتغير S1 لذا لا بد من تحديد مدى التغير (الزيادة أو النقصان) في هذا المتغير والتي تؤثر على قيمة دالة الهدف مع توفر الحل المطلوب؛ فمثلاً S1 تؤدي إلى الإقلال من المادة A وبالتالي زيادة الفائدة والإقلال من S1 يؤدي إلى زيادة المادة المستخدمة A. لنفرض أن قيمة الزيادة على القيد الأول هي $\blacktriangle 1$.

ومن خلال استعراض مراحل الحل مع الأخذ بعين الاعتبار قيم S1 يمكن الحصول على الجدول (26 ـ 3).

جدول (26 ـ 3) مراحل الحل)

المعادلات Equation	Starting 0 البداية	(1)	(2) الأمثل (Optimum)
	Right-Side Elements in Iteration		
Z	0	12	$12\ 2/3 + 1/3 \blacktriangle 1$
1	$6 + \blacktriangle 1 =$	$2 + \blacktriangle 1 =$	$4/3 + 2/3 \blacktriangle 1$
2	8	4	$10/3 - 1/3 \blacktriangle 1$
3	1	5	$3 - 1 \blacktriangle 1$
4	2	2	$2/3 - 2/3 \blacktriangle 1$

من خلال هذا الجدول نحصل على المعادلات التالية:

$$Xi = 4/3 + 2/3 \blacktriangle 1 \geqslant 0$$

$$Xe = 10/3 - 1/3 \blacktriangle 1 \geqslant 0$$

$$S3 = 3 - \blacktriangle 1 \geqslant 0$$

$$S4 = 2/3 - 2/3 \blacktriangle 1 \geqslant 0$$

وبعد حل هذه المعادلات نحصل على المدى المطلوب:

$$-2 \leqslant \blacktriangle 1 \leqslant 1$$

وأي تغيير في المصدر الأول خارج هذا المدى سوف يقود إلى حل لا نهائي (غير محدود).

2 ـ التغير في معاملات دالة الهدف Changes in The Objective Function Coefficients:

من المعروف أن متغيرات دالة الهدف تحتوي على التكاليف أو الأرباح. ويقوم نموذج البرمجة الخطية بتحديد تشكيلة المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل من هذه المتغيرات في أحد جوانبه بالاسترشاد بمعاملات هذه المتغيرات في دالة الهدف. وقد يرغب متخذ القرار في التعرف على النتائج التي قد تترتب على اختلاف أحد أو بعض هذه المعاملات على تشكيلة المتغيرات الأساسية المثالية، لأن هذه المعاملات عادة ما تكون تقديرية كما هو في السابق. ويجيب أسلوب تحليل الحساسية على هذا التساؤل عن طريق تحديد مدة التغير في معاملات دالة الهدف والتي لا تؤثر في هذه التشكيلة. تتغير قيمة دالة الهدف (الربح/التكاليف) تبعاً لتغير قيم المعاملات المرتبطة بالمتغيرات الداخلة

في هذه الدالة، لذا لا بد من تحديد مدى تغير هذه المعاملات (دالة الهدف) دون التأثير على قيمة المتغيرات. لنأخذ المتغير Xe ونرفع الفائدة المتوقعة من استخدامه إلى القيمة $\triangle$ وبهذا فإن دالة الهدف تصبح:

دالة الهدف $Max.\ Z = (3 + \triangle)\ Xe + 2Xi$ (القيمة الكبرى)

ثم نستخدم هذه المعادلة لإيجاد جدول الحل في الجدول (27 ـ 3):

جدول (27 ـ 3)

C	Basic	$(3+\triangle)$	2	0	0	0	0	قيم الحل
	●	Xe	Xi	S1	S2	S3	S4	RHS
2	Xi							
$(3+\triangle)$	Xe							
0	S3							
0	S4							
	Z							$12\ 2/3 + 10/3\ \triangle$
	C-Z	0	0	$1/3 - 1/3\ \triangle$	$4/3 + 2/3\ \triangle$	0	0	

لاحظ أن هذه الدالة يمكن الوصول إليها من جدول الحل (28 ـ 3) وذلك اعتماداً على معادلة Xe

جدول (28 ـ 3)

C	Basic	3	2	0	0	0	0	قيم الحل
	●	Xe	Xi	S1	S2	S3	S4	RHS
3	Xe	1	0	- 1/3	1/3	0	0	10/3

ونظراً لأن $S1, S2 \geqslant 0$ فإن

$$1/3 - \triangle/3 \geqslant 0$$

$$4/3 + 2\triangle/3 \geqslant 0$$

ومن هنا يمكن تحديد قيمة $1 \leqslant \triangle \leqslant -2$)، بمعنى آخر فإن Xe يمكن أن يقل إلى (1) أو أكبر إلى (4) دون أن يؤثر على المتغيرات، لكن قيمة دالة الهدف سوف تتغير حسب:

$$Z = 12\ 2/3 + 10/3\ \triangle$$

كذلك يمكن الرجوع إلى المثال رقم (1) المطلوب رقم (4) والذي بين فيها اختبار الحساسية عندما تتغير أرباح السلعتين.

■ **مشكلة الازدواج (أو النموذج المقابل) The Dual Problem:**

النموذج المقابل أو الازدواج هو عبارة عن تحويل ميكانيكي من المشكلة الأساسية إلى عكسها. ولكل نموذج مقابل Dual له حل أمثل ينطبق تماماً مع حل النموذج الأول، أي أنه يمكن تحويل أية مشكلة في البرمجة الخطية إلى ما يقابلها للحصول على نفس النتيجة وباستخدام خطوات محددة. واستخدام النموذج المقابل يحقق فوائد عديدة منها السرعة والسهولة في الحصول على الحل الأمثل، عندما يصعب حلها عن طريق النموذج الأول. وذلك عن طريق اتباع خطوات وعمليات بسيطة وهي:

1 ـ إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأول تهدف إلى القيمة العظمى Maximization فإن دالة الهدف في النموذج المقابل سوف تهدف إلى القيمة الصغرى Minimization والعكس صحيح.

2 ـ تصبح الصفوف في المشكلة الأصلية أعمدة في مشكلة الازدواج.

3 ـ تصبح معاملات دالة الهدف في المشكلة الأصلية، الطرف الأيمن في معادلات القيود لمشكلة الازدواج. والطرف الأيمن من المعادلات تكون معاملات لدالة الهدف.

4 ـ تحويل الإشارة أكبر من أو يساوي في المشكلة الأصلية إلى أقل من أو يساوي في مشكلة الازدواج والعكس صحيح.

5 ـ إستبدال جميع المتغيرات في المشكلة الأصلية، المشار إليها بالحرف X إلى متغيرات مشار إليها بالحرف Y. والعكس صحيح.

6 ـ إضافة شرط عدم السلبية إلى جميع المتغيرات الناتجة.

ويتبع هذه الخطوات نلاحظ أنه إذا كان عدد المتغيرات في النموذج الأصلي يساوي (n) وعدد القيود المفروضة يساوي (m) فإن عدد المتغيرات في النموذج المقابل يصبح مساوياً إلى (m) وعدد القيود مساوياً إلى (n). وفي ما يلي بعض الأمثلة عن كيفية التحويل من النموذج الأصلي إلى النموذج المقابل كما في الجدول (29 ـ 3).

جدول (29 ـ 3) أمثلة النموذج المقابل

النموذج الأصلي Primal model	النموذج المقابل Dual Model
$Max.Z = 3X1 + 2X2$ Subject To $X1 + X2 \leqslant 3$ $X1 + 2X \leqslant 4$ $X1, X2 \geqslant 0$	$Min.\ W = 3Y1 + 4Y2$ Subject To $Y1 + Y2 \geqslant 3$ $Y1 + 2Y2 \geqslant 2$ $Y1, Y2 \geqslant 0$
$Max.\ Z = 9x1 + 7x2$ S. T. $10X1 + 5X2 \leqslant 50$ $6X1 + 6X2 \leqslant 36$ $4.5X1 + 18X2 \leqslant 81$ $X1, X2 \geqslant 0$	$Min.\ W = 50y1 + 36y2 + 81y3$ S. T. $10Y1 + 6Y2 + 4.5Y3 \geqslant 9$ $5Y1 + Y2 + 18Y3 \geqslant 7$ $Y1, Y2, Y3 \geqslant 0$
$Max.\ Z = 9x1 + 14x2 + 6x3$ S. T. $X1 + X2 + X3 \leqslant 9$ $4X1 - 3X2 + 5X3 = 4$ $X1, X2, X3 \geqslant 0$	$Min.\ W = 9Y1 + 4Y2$ S. T. $Y1 + 4Y2 \geqslant 9$ $Y1 - 3Y2 \geqslant 14$ $Y1 + 5Y2 \geqslant 6$ $Y1, Y2 \geqslant 0$

المشاكل العامة التي تواجه استخدام النموذج المقابل:

1 ـ حالة عدم تناسق دالة الهدف مع علاقات القيود.

تحدث هذه المشكلة عندما تكون دالة الهدف هي البحث عن القيمة العظمى بينما تكون علاقات التباين الموجبة (أي أكبر من أو تساوي) في القيود، كما هو موضح في المثال التالي (مثال 4):

دالة الهدف: $Max.\ Z = 12X1 - 5X2 + 8X3$ (القيمة العظمى)

القيود:

$X1 + X2 - 2X3 \geqslant 32$

$-X1 + 3X2 + X3 \geqslant 24$

$2X1 + 2X2 - 5X3 \geqslant 12$

شرط عدم السلبية: $X1, X2, X3 \geqslant 0$

ولكن يمكن التخلص من هذه المشكلة وذلك عن طريق ضرب دالة الهدف

في (1 ـ) لتتحول إلى دالة القيمة الصغرى وتتسق مع علاقات القيود. وتصبح دالة الهدف كالآتي:

دالة الهدف $Min.\ Z = -12X1 + 5X2 - 8X3$ (القيمة الصغرى)

2 ـ عندما تمتزج علاقات القيود في المشكلة الواحدة.

وجود علاقات تباين موجبة (⩾) وسالبة (⩽) في نفس قيود المشكلة. والمثال التالي يوضح ذلك:

دالة الهدف $Max.\ Z = 18X1 + 15X2$ (القيمة العظمى)

القيود:

$2X1 + 4X2 \leqslant 120$

$4X1 - 2X2 \geqslant 18$

$X1 + X2 \leqslant 37$

شرط عدم السلبية $X1, X2 \geqslant 0$

من الواضح أن إشارة تباين القيد الثاني موجبة (أكبر أو تساوي)، وهذه الإشارة لا تتفق مع باقي القيود ومع دالة الهدف. ويمكن التخلص من هذه المشكلة في النموذج الأصلي عن طريق ضرب هذا القيد (الثاني) في (1 ـ) ليصبح القيد كالآتي:

$$-4X1 + 2X2 \leqslant -18$$

ولكن سوف يترتب على ذلك أن المتغير العاطل الخاص بهذا القيد، والذي يظهر في الحل الأساسي الأول يتخذ قيماً سالبة (أقل أو يساوي)، خارجاً بذلك على شرط عدم السلبية. ولكن يمكن التخلص من هذه المشكلة بعدة طرق منها:

أ ـ التخلص من القيم السالبة عن طريق عمليات الصفوف في طريقة الاستبعاد الكامل قبل إعداد جدول الحل الأساسي الأول. فلو فرضنا في القيد $(-4X_1 + 2X_2 \leqslant -18)$ التخلص من X1 وذلك عن طريق استخدام القيد $(X1 + X2 \leqslant 37)$. ويتم ذلك بضرب المعادلة الثانية في (4) وإضافته جبرياً إلى المعادلة الأولى كالآتي:

$$4X1 + 4X2 \leqslant 148 \quad \text{ضربت في (4)}$$

$$-4X_1 \times 1 + 2X_2 \leqslant -18$$

$$0 + 6 \times 2 \leqslant 130$$

ب ـ صياغة النموذج المقابل (الثنائي أو الازدواج) إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأصلي لا تحتوي على معاملات سالبة. ويمكن توضيح التغيير للنموذج الأصلي إلى النموذج المقابل كالآتي:

دالة الهدف: $MIN.\ W = 120Y1 - 18Y2 + 37Y3$ (القيمة الصغرى)

القيود:

$2Y1 - 4Y2 + Y3 \geqslant 18$

$4Y1 - 2Y2 + Y3 \geqslant 15$

شرط عدم السلبية: $Y1, Y2, Y_3 \geqslant 0$

كما يمكن في الواقع الإبقاء على المعادلة $4X - 2X2 \geqslant 18$ دون تعديل اتجاه إشارة التباين، على أن يبدأ الحل الأساسي الأول بمتغير وهي في هذا القيد، عليك بصياغة المشكلة بهذه الطريقة وحلها وتوضيح المتغيرات في جدول الحل الأمثل.

3 ـ عندما تكون علاقة أحد القيود أو بعضها علاقة تساوٍ. ويترتب على ذلك بالطبع أن المتغير المقابل لهذا القيد (أو المتغيرات المقابلة لهذه القيود) في الازدواج يكون غير محدد الإشارة. ونفرض مثلاً:

دالة الهدف: $Max.\ Z = 12X1 + 9X2$ (القيمة العظمى)

القيود:

$2X1 + 3X2 = 138$

$2X1 \leqslant 16$

$X2 \leqslant 28$

شرط عدم السلبية $X1, X2 \geqslant 0$

ويكون الازدواج أو الثنائي لهذه المشكلة كالآتي:

دالة الهدف: $Min.\ W = 138Y1 + 16Y2 + 28Y3$ (القيمة الصغرى)

القيود:

$2Y1 + Y2 \geqslant 12$

$3Y1 + Y3 \geqslant 9$

غير محددة الإشارة: $Y1$

شروط عدم السلبية $Y1, Y2 \geqslant 0$

ويلاحظ أن $Y1$ في الثنائي، والذي يقابل القيد $(2X1 + 3X2 = 138)$ في النموذج الأصلي غير محدد الإشارة لقيام علاقة التساوي في هذا القيد. ويتم التخلص من هذه المشكلة بتحويل علاقة التساوي إلى علاقتي تباين متضادتين في الاتجاه. فالقيد $(2X1 + 3X2 = 138)$ يعادل تماماً القيدين:

$$2X1 + 3X2 \leqslant 138$$

$$2X1 + 3X2 \geqslant 138$$

ثم يتم تحويل إشارة التباين في المعادلة $(2X1 + 3X2 \geqslant 138)$ في (1 ـ) كما سبق أن ذكرنا. ويصبح الثنائي في هذه الحالة كالآتي:

دالة الهدف: $Min.\ W = 138Y1 - 138Y2 + 16Y3 + 28Y4$ (القيمة الصغرى)

القيود:

$2Y1 - 2Y2 + S1 \geqslant 12$

$3Y1 - Y2 + S2 \geqslant 9$

شرط عدم السلبية: $Y1, Y2, S1, S2 \geqslant 0$

وبذلك نتخلص من مشكلة وجود متغير غير محدد الإشارة في النموذج.

المعاني الاقتصادية لمشكلة الازدواج:

1 ـ من بين المزايا التي يمكن أن تنتج عندما نستخدم النموذج المقابل (الازدواج) هو تبسيط المتباينات الخطية التي يراد حلها؛ فلو فرضنا في مشكلة معينة وجود عشرين قيداً مثلاً وثلاثة متغيرات، فإنه بعد تحويل المشكلة الأصلية إلى مشكلة ازدواج، فيصبح لدينا ثلاثة شروط فقط، أما في حالة وجود منتجين فقط، فيصبح عدد الشروط اثنين أيضاً.

2 ـ لو فرضنا أن الحل الأمثل في النموذج الأصلي يحتوي على (K,L,M) وأن الحل الأمثل للنموذج المقابل يحتوي على (A,B,C)، فإن المسؤول عن هذا المشروع سوف لن يقبل تأجير هذا المصنع، إلا إذا تحصل على الأقل مما سوف يتحصل عليه إذا قام هو بالإنتاج، ويمكن التعبير عن ذلك في صورة معادلات رياضية كما يلي:

$$2M + 4L + 3K \leqslant 60C + 40B + 80A$$

3 ـ من خلال الأمثلة السابقة وجدنا أن قيمة (Z) سواء كانت في حل مشكلة النموذج الأصلي للبرمجة الخطية أو الحل لمشكلة النموذج المقابل متساوية. فما معنى ذلك؟ إن ذلك يعني أن قيمة هذه الطاقات الإنتاجية للمشروع تساوي بالضبط الربح الذي يمكن لهذا المشروع تحقيقه، وذلك إذا وضعت هذه الموارد في أحسن فرصة ممكنة.

4 ـ في حالة وجود قيمة صفر لأحد المتغيرات في النموذج المقابل، وأنه لم يتم استخدام كل الوقت المتاح في هذا القسم، فهذه نتيجة منطقية، حيث يعني وجود وقت فائض وغير مستغل في هذا القسم. إن إضافة أي وقت آخر لهذا القسم لن يؤثر في دالة الهدف.

■ الحالات الخاصة في طرق البرمجة الخطية Special Cases in the Method of Linear Programming:

توجد بعض الحالات الخاصة التي قد تظهر عند استخدام الطريقة العامة (السيمبليكس) لإيجاد أفضل الحلول، ومن أهم هذه الحالات ما يلي:

1 ـ التفسخ أو الانحلالية Degeneracy:

يقصد بالتفسخ الحالة التي يتم عندها الوصول إلى الحل في مرحلة ما بحيث يتكرر هذا الحل في المرحلة التالية. وسوف نستعرض هذه الحالة من خلال المثال (5).

دالة الهدف: $Max.\ Z = 3X1 + 9X2$ (القيمة العظمى)

القيود:

$X1 + 4X2 \leqslant 8$

$X1 + 2X2 \leqslant 4$

شرط عدم السلبية: $X1, X2 \geqslant 0$

لاستخدام الطريقة العامة نحول هذه المعادلات إلى الشكل المعياري الذي يتناسب مع استخدام الطريقة العامة (السيمبليكس):

دالة الهدف: $Max.Z = 3X1 + 9X2 + 0S1 + 0S2$ (القيمة العظمى)

$X1 + 4X2 + S1 = 8$

$X1 + 2X2 + 0S2 = 4$

شرط عدم السلبية: $X1, X2, S1, S2 \geqslant 0$

المتغيرات الأساسية (Basic) هي S1, S2 (المتغيرات الخارجة)

أما خطوات الحل فيمكن استعراضها من خلال الجداول التالية:

جدول (3 ـ 30) الحل المبدئي

C	Basic	3	9	0	0	قيم الحل
	•	X1	X2	S1	S2	RHS
0	S1	1	4	1	0	8 8/4 = 2
0	S2	1	2	0	1	4 4/2 = 2
	Z	0	0	0	0	0
	C-Z	3	9	0	0	

جدول (3 ـ 31) الحل الثاني

C	Basic	3	9	0	0	قيم الحل
	•	X1	X2	S1	S2	RHS
9	X2	1/2	1	0	1/2	2
0	S1	-1	0	1	-2	0
	Z	9/2	9	0	9/2	18
	C-Z	9/2	9	0	0	

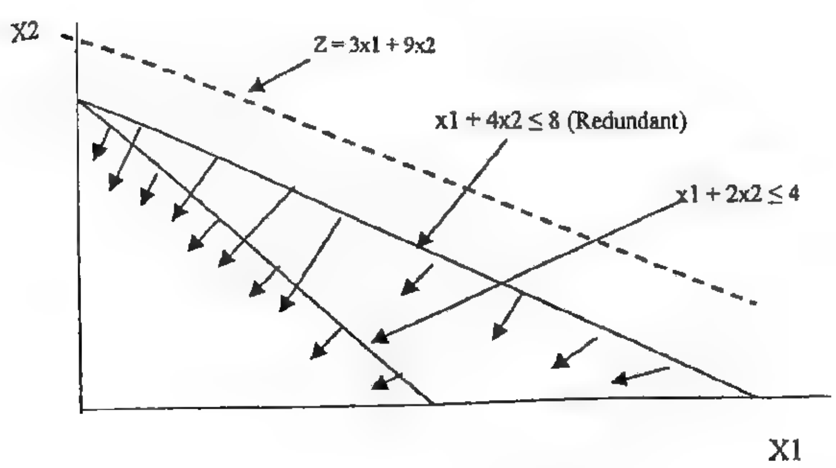
جدول (3 ـ 32) الحل الأمثل

C	Basic	3	9	0	0	قيم الحل
	•	X1	X2	S1	S2	RHS
9	X2	1/2	1	0	1/2	2
3	X1	-1	0	1	-2	0
	Z	9/2	9	0	9/2	18
	C-Z	-3/2	0	0	-9/2	

لاحظ من خلال الجدول أن القيمة ($Z = 18$) في المرحلة لم تتحسن من جراء إجراء العمليات الحسابية اللازمة للوصول إلى المرحلة (2). لاحظ أيضاً أن قيمة S2 (المتغير الذي سوف يخرج) هي الصفر بمعنى آخر فإن قيمة المتغير الداخل سوف تصبح هي الأخرى مساوية للصفر وأنه لن يطرأ أي تحسين على دالة الهدف.

ومن خلال النظر إلى الرسم (4 ـ 3) الممثل للحل نلاحظ أن هناك 3 خطوط (قيود) تقود إلى نقطة الحل الأمثل، وأن النموذج المستخدم يحتوي على متغيرين وهذا بدوره يعني أن هناك قيداً من القيود إضافياً (لاحاجة له) لأنه يلزم فقط قيدان لإيجاد الحل الأمثل. وتسمى المرحلة الثانية هنا بالدورة (Cycle) ويمكن إيجاد الطرق اللازمة لاكتشاف هذه الحالة لتفادي عدم تكرارها وإضافة الوقت في إجراء العمليات الحسابية لهذه الدورة.

الرسم البياني (4 ـ 3)



2 ـ الحلول البديلة Alternative Optima:

عندما توازي دالة الهدف معادلة أحد القيود المتوفرة في النموذج الخطي فإنه سوف تظهر عدة نقاط على خط هذا القيد بحيث تحقق الحل المطلوب، وبهذا نحصل على أكثر من حل لنفس المشكلة، ويمكن استعراض هذه الحالة من خلال المثال (6):

دالة الهدف: $Max.\ Z = 2X + 4Y$ (القيمة العظمى)

القيود:

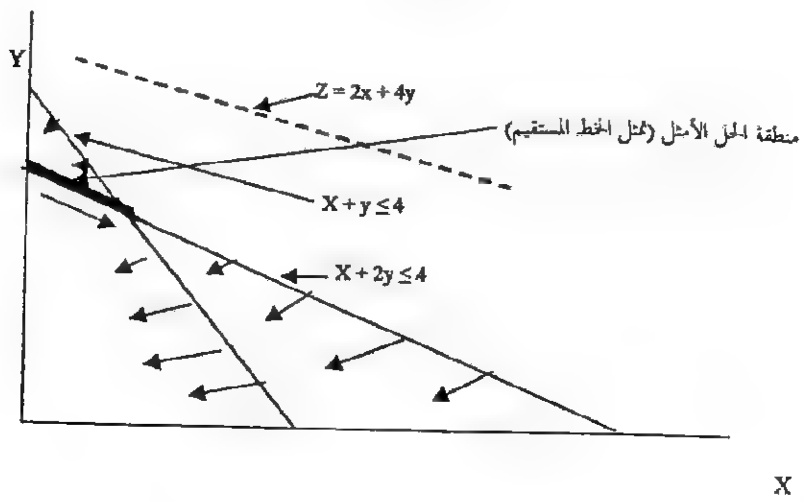
$X + 2Y \leqslant 5$

$X + Y \leqslant 4$

شروط عدم السلبية: $X,Y \geqslant 0$

وباستخدام الرسم يمكن إيجاد الحل كما هو موضح في الشكل (5 ـ 3)

الرسم البياني (5 ـ 3)



لاحظ أن كل النقاط الواقعة على المستقيم B-C تحقق الهدف. أما جدول الحل باستخدام الطريقة العامة فهو كما يلي:

جدول (33 ـ 3) الحل المبدئي

C	Basic	2	4	0	0	قيم الحل
	●	X	Y	S1	S2	RHC
0	S1	1	2	1	0	5
0	S2	1	1	0	1	4 ←
	Z	0	0	0	0	0
	C-Z	2	4 ↑	0	0	

جدول (34 ـ 3) الحل الثاني

C	Basic	2	4	0	0	قيم الحل
	●	X	Y	S1	S2	RHS
4	Y	1/2	1	1/2	0	5/2
0	S2	1/2	0	-1/2	1	3/2 ←
	Z	2	4	2	0	10
	C-Z	0 ↑	0	-2	0	

جدول (35 ـ 3) الحل الأمثل

C	Basic	2	4	0	0	قيم الحل
	•	X	Y	S1	S2	RHS
2	X	1	0	-1	2	3
4	Y	0	1	1	-1	1
	Z	2	4	2	0	10
	C-Z	0	0	-2	0	

من خلال هذا الجدول (35 ـ 3) يتبين لنا أن الطريقة العامة تستطيع إظهار الحل في النقطتين B, C وللحلول البديلة أهمية كبيرة في الحياة العملية، حيث تتيح فرصة الاختيار واتخاذ القرار من قبل الإدارة وذلك بتوفر بدائل تتساوى فيها الفائدة المحققة. فمثلاً لو كانت المتغيرات X,Y تمثل مواد منتجة وتستخدم لتصنيع مادة ما فإنه من الأفضل اختيار الحل في المرحلة الأولى ($Y = 5/2, X = 0$) نظراً لأنه من الأفضل إنتاج مادة لتحقيق هدف معين بدل إنتاج مادتين لإعطاء نفس الهدف.

3 ـ الحلول غير المحدودة Unbounded Solution :

وتعني هذه الحالة عدم وجود حدود على الحل حيث يمكن زيادة متغير أو أكثر من المتغيرات الداخلة في قيود المشكلة دون مخالفة لأي قيد من القيود وقد تظهر حالة اللاحدود على:

أ ـ دالة الهدف.

ب ـ منطقة الحل.

وسوف نستعرض هذه الحالة من خلال المثال التالي (مثال 7):

دال الهدف: $Max.\ Z = 2X + 1Y$ (القيمة العظمى)

القيود:

$X - Y \leqslant 10$

$2X \leqslant 40$

شرط عدم السلبية: $X,Y \geqslant 0$

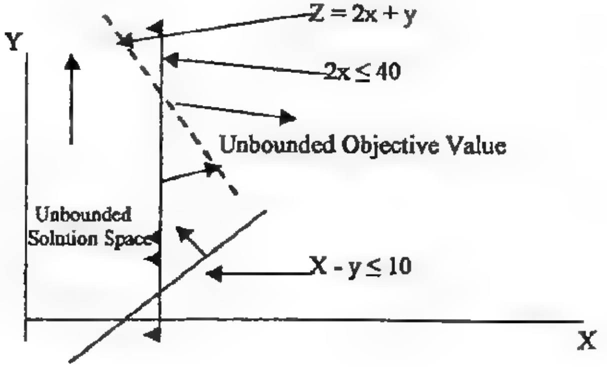
من خلال جدول الحل المبدئي التالي:

جدول الحل المبدئي (36 ـ 3)

C	Basic	2	1	0	0	قيم الحل
	•	X	Y	S1	S2	RHS
0	S1	1	-1	1	0	10
0	S2	2	0	0	1	40
	Z	0	0	0	0	0
	C-Z	2	1	0	0	

نلاحظ أن X,Y هي المتغيرات التي ستدخل وتحل محل S1, S2 حيث نبدأ بإدخال X نظراً لاحتوائها على أعلى قيمة، وبعد هذا تكون القيم في عمود Y إما سالبة أو صفراً، وهذا يعني أن زيادة هذا المتغير سوف لا تؤثر على القيود في أعمدة المتغيرات الداخلة (غير الأساسية Nonbasic) فإن منطقة الحل تكون غير محدودة وباتجاه المتغير الذي يحوي في عموده قيماً سالبة أو صفراً، ويمكن بيان هذا من خلال الشكل (6 ـ 3)

الرسم البياني (6 ـ 3)



وفي بعض الأحيان قد تكون منطقة الحل غير محدودة في حين تمتلك دالة الهدف حلاً واحداً. ويمكن إشهار هذه الحالة من خلال المثال التالي:

دالة الهدف: $Max.\ Z = 6X + 2Y$ (القيمة العظمى)

القيود:

$2X - Y \leqslant 2$

$X \leqslant 4$

شرط عدم السلبية: $X,Y \geqslant 0$

من خلال جدول الحل نلاحظ أن منطقة الحل غير محدودة وباتجاه Y (المرحلة الابتدائية) في حين أنه في المرحلة النهائية تمتلك دالة الهدف حلاً وحيداً ($X = 4, Y = 6$) كما هو موضح في الشكل.

جدول (37 ـ 3) الحل المبدئي

C	Basic	6	2	0	0	قيم الحل
	●	X	Y	S1	S2	RHS
0	S1	2	-1	1	0	2
0	S2	1	0	0	1	4
	Z	0	0	0	0	0
	C-Z	6	2	0	0	

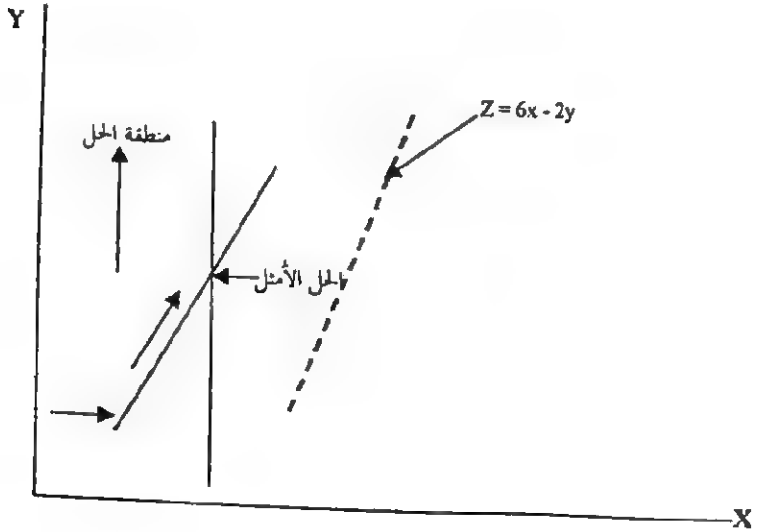
جدول (38 ـ 3) الحل الثاني

C	Basic	6	2	0	0	قيم الحل
	●	X	Y	S1	S2	RHS
6	X	1	-1/2	1/2	0	1
0	S2	0	1/2	-1/2	1	3
	Z	6	-3	3	0	6
	C-Z	0	5	-3	0	

جدول (39 ـ 3) الحل الثالث

C	Basic	6	2	0	0	قيم الحل
	●	X	Y	S1	S2	RHS
2	Y	0	1	-1	2	6
6	X	1	0	0	1	4
	Z	6	2	-2	10	36
	C-Z	0	0	2	-10	

الرسم البياني (7 ـ 3)



4 ـ عدم توفر الحل Nonexitent (infeasible) Solution

تظهر هذه الحالة عند استخدام المتغيرات الاصطناعية وبالذات عندما يحتوي أحد القيود على الإرشاة (⩾)، وهي الحالة التي يتم فيها الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة المدروسة، ولكن مع احتواء هذا الحل على متغير اصطناعي أو أكثر. وسوف نستعرض المثال (8):

دالة الهدف $Max.\ Z = 3X + 2Y$ (القيمة العظمى):

$$2X + Y \leqslant 2$$
$$3X + 4Y \geqslant 12$$

شرط عدم السلبية $X, Y \leqslant 0$

أما جدول الحل فإنه يبين أن المشكلة لا تمتلك حلاً وذلك من خلال قيمة R الموجبة ($R = 4$). أما في حالة التقليل فإنه لا يكون هناك حل إذا كانت قيمة المتغير الاصطناعي سالبة:

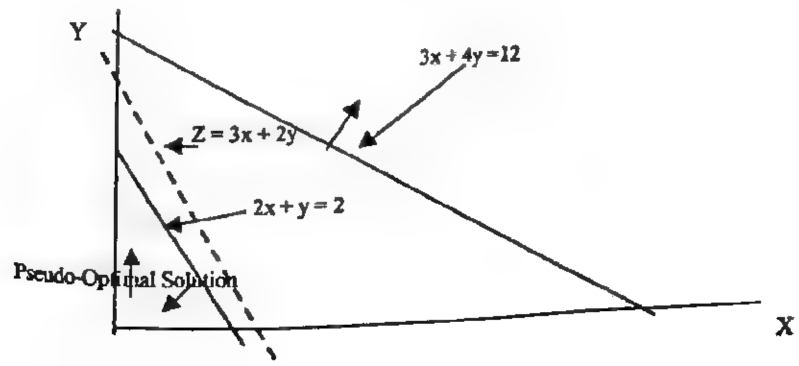
جدول (40 ـ 3)

C	Basic	3	2	0	0	M	قيم الحل
	•	X	Y	S1	S2	R	RHS
0	S1	2	1	0	1	0	2 ←
M	R	3	4	-1	0	1	12
	Z	3M	4M	-M	0	M	12M
	C-Z	3-3M	↑ 2-4M	M	0	0	

جدول (41 ـ 3)

C	Basic	3	2	0	0	M	قيم الحل
	•	X	Y	S1	S2	R	RHS
2	Y	2	1	0	1	0	2
M	R	-5	0	-1	-4	1	4
	Z	4-5M	2	-M	2-4M	M	4 + 4M
	C-Z	7 + 5M	0	M	-2-4M	0	

الرسم البياني (8 ـ 3)



أسئلة وتمارين للمناقشة Questions and Exercises for Discussion:

أسئلة Questions

س1 ـ عرف كل ما أمكن ذلك وباستخدام الأسلوب العلمي كلاً من:

أ ـ البرمجة الخطية ب ـ القيمة العظمى والصغرى جـ ـ منطقة الحلول العملية والحل الأمثل.

س2 ـ ما هي استخدامات البرمجة الخطية؟ وما هي الشروط الأساسية التي يجب توافرها عند استخدام أو تطبيق أسلوب البرمجة الخطية؟ مع إعطاء أمثلة كل ما أمكن ذلك.

س3 ـ ما هو المقصود بطريقة التحليل البياني وطريقة السيمبليكس؟ وما هي مزاياهما وعيوبهما؟

س4 ـ حدد واشرح ملخص خطوات الطريقة العامة لحل مشاكل القيمة العظمى.

س5 ـ ما هو المقصود بكل من:

أ ـ تحليل الحساسية؟ ب ـ النموذج الثنائي أو المقابل والمعاني الاقتصادية له؟

س6 ـ ما هي الحالات الخاصة التي قد تظهر عند استخدام إحدى طرق البرمجة الخطية وذلك لإيجاد أفضل الحلول؟

تمارين Exercises:

س1 ـ شعر السيد «أيمن» بإرهاق شديد، فتوجه إلى طبيبه الخاص الذي نصحه أن يتعاطى يومياً ما لا يقل عن 48 وحدة من فيتامين ب1، و50 وحدة من فيتامين ب2. وتوجه السيد (أيمن) إلى صيدليته المفضلة حيث أبلغه الصيدلي أن لديه نوعاً من الحبوب يحتوي كل منها على وحدة من فيتامين ب1 وخمس وحدات من ب2 ونوع من الكبسولات يحتوي كل منها على أربع وحدات من فيتامين ب1 ووحدة واحدة من ب2. ويبلغ سعر الوحدة الواحدة درهماً واحداً بينما يبلغ سعر الكبسولة الواحدة ثلاثة دراهم. بصفتك السيد (أيمن)، ما هي التشكيلة المثالية من الحبوب والكبسولات التي يجب عليك تعاطيها يومياً لتنفيذ تعليمات الطبيب والتي تكلفك أقل ما يمكن؟

س2 ـ تقوم شركة السيارات العصرية بإنتاج نوعين من السيارات، النموذج الأول فاخر للعائلات والنموذج الثاني جيب للأعمال الشاقة. وتحقق الشركة أرباحاً مباشرة على النوع الأول قدرها 600 دينار، وقدرها 300 دينار على الجيب. ويتطلب إنتاج السيارة الواحدة من النوع الأول 30 ساعة في خط التجميع و10 ساعات في خط التشطيب والدوكو، وساعتين في مركز الفحص والاختبار، بينما تحتاج الجيب إلى 12 ساعة على

خط التجميع و8 ساعات في خط التشطيب والدوكو وأربع ساعات في مركز الفحص والاختبار. وتبلغ طاقة خط التجميع 6000 ساعة في الفترة الإنتاجية، بينما تبلغ طاقة خط التشطيب والدوكو 2600 ساعة في نفس الفترة، وتبلغ طاقة مركز الفحص والاختبار 1000 ساعة في الفترة. فما هي تشكيلة الإنتاج المثالية التي تحقق أكبر حصيلة من الأرباح المباشرة؟

س3 ـ تقوم ورشة (وائل) لبناء زوارق الصيد ببناء نوعين نمطيين من زوارق الصيد الحجم المتوسط والحجم الصغير. وهي تقوم بيع إنتاجها خلال فصلي الربيع والصيف في فصل الخريف والشتاء محققة أرباحاً مباشرة على النوع المتوسط تبلغ 10 دنانير وعلى الصغير تبلغ 9 دنانير، بينما تبيع إنتاجها خلال فصلي الخريف والشتاء في فصلي الربيع والصيف مقابل أرباح مباشرة قدرها 20 ديناراً للزورق المتوسط و12 ديناراً للزورق الصغير. ويستغرق إنتاج الزورق المتوسط 10 ساعات في ورشة النجارة وست ساعات في التشطيب، بينما يستغرق الزورق الصغير 12 ساعة في ورشة النجارة وساعتين في التشطيب. وتبلغ طاقة ورشة النجارة للستة شهور 6000 ساعة عمل، بينما تبلغ طاقة ورشة التشطيب 7500 ساعة في الستة شهور. وتستورد الأخشاب اللازمة لبناء الزوارق من الخارج بمواصفات معينة. ويحدد حجم الواردات الحد الأقصى لعدد الزوارق التي يمكن بناؤها بما لا يزيد عن 1500 وحدة من كل نوع.

المطلوب: تحديد برنامج إنتاج وتصريف الزوارق الأمثل الذي يحقق أقصى حصيلة من الأرباح المباشرة.

س4 ـ معمل أو مصنع يمزج ثلاث رتب من البن الخام للحصول على ثلاثة أنواع من البن المطحون هي النوع الممتاز، والنوع الناعم، والنوع العادي. ويختلف المزيج المطلوب لكل نوع من أنواع البن الثلاثة من الرتب الثلاث فالبن العادي يتطلب أن يحتوي المزيج على 35% من الرتبة الأولى، 20% من الرتبة الثانية، 45% من الرتبة الثالثة. بينما البن الناعم يتطلب أن ينطوي المزيج على 30% من الرتب الأولى، 30% من الرتبة الثانية، 40% من الرتبة الثالثة، أما البن الممتاز فينطوي المزيج على 25% من الرتب الأولى، 40% من الرتبة الثانية، 35% من الرتبة الثالثة. وتبلغ تكلفة كيلو البن الخام من الرتبة الأولى 90 درهماً بينما تبلغ تكلفة الكيلو من الرتبة الثانية 80 درهماً وتبلغ تكلفة الكيلو غرام من الرتبة الثالثة 60 درهماً. وترغب الإدارة في الإنتاج بطاقتها الأسبوعية والتي تبلغ 6.5 أطنان من البن المطحون. لأنها مرتبطة بعقود توريد كميات من أنواع البن الثلاثة تبلغ 2.5 طن من البن العادي، 2 طناً من البن الناعم، 1.5 طن من البن الممتاز.

المطلوب: ما هي خطة المزيج الذي يفي بهذه المتطلبات بأقل تكاليف ممكنة. ثم بتفسير القيم الظاهرة في جدول الحل الأمثل، وخاصة علاقة صف المؤشرات بمعاملات الإحلال.

س5 ـ مصنع صغير يقتصر إنتاجه على سلعتين وذلك من خلال ثلاثة أقسام إنتاجية. الجدول التالي يبين المعلومات المتوفرة لدى المصنع:

السلعة	التصنيع	التركيب	التجميع	ربح الوحدة بالدينار
السلعة الأولى (الدراجات العادية)	1 ساعة	5 ساعات	3 ساعات	80
السلعة الثانية (الدراجات النارية)	2 ساعتان	4 ساعات	1 ساعة	100
الطاقة المتاحة	720	1800	900	

المطلوب:

1 ـ تحديد المزيج السلعي من السلعتين والذي يحقق أقصى ربح ممكن في ظل القيود المفروضة عن طريق استخدام أسلوب التحليل البياني. وهل يوجد ساعات غير مستغلة؟

2 ـ ما هو القرار الأمثل الذي يجب اتخاذه إذا تغيرت أرباح السلعتين كأن يحقق المصنع ربحاً قدره (100) دينار للسلعة الأولى و(80) ديناراً للسلعة الواحدة الثانية؟

3 ـ أوجد الجدول المبدئي ثم الجدول الأول باستخدام طريقة السيمبلكس.

س6 ـ تقوم شركة الخطوط الجوية الليبية بوضع دراسة لإمكانية شراء طائرات جديدة لتوسيع نطاق خدماتها. وقد خصص لذلك مبلغ وقدره 480 مليون دولار. وبعد دراسة العروض المقدمة من قبل مصانع الطائرات وجد أن هناك ثلاثة أنواع من الطائرات يمكن الاختيار من بينها وهي (أ، ب، جـ) وقد كان ثمن الطائرة (أ) ثمانية ملايين دولار. وثمن الطائرة (ب) ستة ملايين دولار وثمن الطائرة (جـ) اثنى عشر مليون دولار. ويقدر العائد الصافي اليومي من كل طائرة من النوع (أ) بعشرة آلاف دينار ومن النوع (ب) بستة آلاف دينار. ومن النوع (جـ) باثني عشر ألف دينار. أما عدد الملاحين المتاحين بالشركة فهو (600) ملاح حيث تحتاج كل طائرة من النوع الأول لخمسة ملاحين وستة ملاحين للنوعين الثاني والثالث. وهناك عدد (240) عامل صيانة حيث تحتاج كل طائرة من النوع الأول لستة عمال لصيانتها. وثلاثة عمال لكل طائرة من النوعين الثاني والثالث.

المطلوب: وضع هذه المشكلة في صورة مشكلة برمجة خطية ـ ثم أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة السيمبلكس بالشكل الذي يجعل العائد أكبر ما يمكن ولماذا؟

س7 ـ يقوم مصنع الأمان للبطاريات بإنتاج نوعين من البطاريات 6 فولت و12 فولتاً ويحتاج إنتاج البطارية من نوع 6 فولت إلى 6 ساعات عمل في قسم التجميع، ساعتي عمل في قسم الاختبار والتغليف، ويحتاج إنتاج البطارية من نوع 12 فولت إلى 3 ساعات عمل في قسم التجميع، 4 ساعات عمل في قسم الاختبار والتغليف. فإذا كان عدد

الساعات المتاحة في قسم التجميع لا يزيد عن 90 ساعة عمل وعدد الساعات المتاحة في قسم الاختبار والتغليف 48 ساعة عمل. وكان ربح البطارية 6 فولت يبلغ 8 دنانير وربح البطارية 12 فولت 10 دنانير. باستخدام طريقة التحليل البياني أوجد الكميات المثالية الواجب أن يقوم المصنع بإنتاجها من كل نوع حتى يتم تحقيق أقصى ربح ممكن.

س8 ـ حدد منطقة الحل المتاحة باستخدام الرسم البياني مع استبعاد القيود المتكررة:

$$X1 + X2 \leqslant 4$$

$$4X1 + 3X2 \leqslant 12$$

$$-X1 + X2 \geqslant 1$$

$$X1 + X2 \leqslant 6$$

$$X1, X2 \geqslant 0$$

س9 ـ باستخدام طريقة السيمبلكس قلل

$$\text{Min. } C = 5X1 + 3X2 - 2X3$$

بشرط أن:

$$X1 + X2 + X3 \leqslant 5$$

$$X1 - 2X2 - X3 \leqslant 4$$

$$X1 + 3X2 + 2X3 \leqslant 15$$

$$X1, X2, X3 \geqslant 0$$

س10 ـ معادلة الهدف لإحدى مشاكل البرمجة الخطية والتي تركز على القيمة العظمى للمنتج هي كالتالي:

$$\text{Max. } Z = 25X + 5Y$$

ما هو ميل المنحنى لهذا الهدف (الحل = -5)

س11 ـ تحقق شركة الحاسبات المبسطة ربحاً وقدره 5 دنانير من الموديل (X) و20 ديناراً من كل وحدة واحدة من الموديل (Y). كل حاسبة واحدة تحتاج إلى زمن معين (دقائق) من خلال عملية التنظيف والاختبار الآلي والجدول التالي يبين ذلك:

الزمن المتاح	متطلبات Y	متطلبات X	
10	4	2	التنظيفات
12	3	6	الاختبارات

المطلوب

1 ـ حدد معادلات دالة الهدف والقيود لهذه المشكلة.

2 ـ أوجد الحل الأمثل عن طريق استخدام طريقة التحليل البياني وطريقة السيمبلكس؟ (الحل ميل دالة الهدف = 1/4 و $X = 0, Y = 2.5, Z = 50$)

س12 ـ تقوم ورشة بإنتاج نوعين من المصنوعات الخشبية (X,Y) وتحتاج كل وحدة من (X) إلى 30 قدماً مكعباً من الخشب و5 ساعات عمل، وتعطي ربحاً قدره 26 ديناراً. أما الوحدة من (Y) فتحتاج إلى 20 قدماً مكعباً من الخشب و10 ساعات عمل، وتعطي عائداً قدره 20 ديناراً. فإذا كانت الورشة لا يمكنها توفير أكثر من 300 قدم مكعب من الخشب و110 ساعات عمل خلال الأسبوع. المطلوب: إيجاد الحل الأمثل لهذه المشكلة بواسطة استخدام طريقة الرسم البياني.

س13 ـ يصنع مصنع للأعمال المعدنية نوعين من الشبابيك ذات الحجم المتوسط (أ، ب)، ويعطي كل شباك من النوع (أ) ربحاً قدره 15 ديناراً، ويعطي كل شباك من النوع (ب) ربحاً قدره 15 ديناراً، ويمر كل شباك من النوعين خلال ثلاثة أقسام إنتاجية، وهي قسم القطع فقسم اللحام ثم قسم الصنفرة، وقد كانت المعلومات المتعلقة بعدد الساعات المتاحة في هذه الأقسام الثلاثة، وما يحتاجه كل منتج من وقت في كل منها مبينة في الجدول التالي:

القسم	الوقت الذي يحتاجه كل شباك واحد في كل قسم		الطاقة الإنتاجية بالساعات
	أ	ب	
قسم القطع	2	3	1500 ساعة
قسم اللحام	3	2	1500 ساعة
قسم الصنفرة	1	1	600 ساعة

المطلوب: ما هو عدد الشبابيك الذي يجب أن ينتجه هذا المصنع من النوعين، والذي يجعل الأرباح أكبر ما يمكن، مستخدماً في ذلك طريقة التحليل البياني؟

س14 ـ مصنع للمسامير به ثلاثة أنواع من الآلات تقوم بإنتاج نوعين من المسامير. والطاقة الإنتاجية لهذه الآلات تكون كالآتي:

الآلة الأولى	50 ساعة
الآلة الثانية	36 ساعة
الآلة الثالثة	81 ساعة

والنوعان من المسامير يمكن إنتاجهما على هذه الآلات الثلاث، ولقد كان الوقت اللازم لتصنيع قنطار من كل نوع على كل آلة والربح المتوقع لذلك مبيناً في الجدول التالي:

الإنتاج	الآلة			صافي الربح/دينار
	الآلة الأولى	الآلة الثانية	الآلة الثالثة	
إنتاج النوع الأول/قنطار	10	6	4.5	9
إنتاج النوع الثاني/قنطار	18	6	18	7

المطلوب: ما هو عدد القناطير من المسامير التي يجب أن ينتجها المصنع من النوعين والذي يحقق أعلى ربح ممكن؟

س15 ـ مصنع للمواد الكيماوية ينتج ثلاثة أنواع من المواد (أ، ب، جـ). ولكن الاستراتيجية التي يجب أن يتبعها هذا المصنع لتغطية الطلب من هذه المواد هي أن يقوم بضرورة إنتاج ما لا يقل عن 4 أطنان من المنتج الأول (أ)، و2 طن من المنتج (ب)، وطن واحد من المنتج (جـ) في اليوم. ويتم إنتاج هذه المواد من مكونين آخرين هما: (س، ص) حيث يعطي كل طن من (س) ربع طن من (أ)، وربع طن من (ب) و(1/12) طن من (جـ). ويعطي كل طن من (ص) (1/2) طن من (أ)، (1/10) طن من (ب)، (1/12) طن من (جـ). فإذا كان المكون (س) يكلف 250 ديناراً للطن الواحد، والمكون (ص) يكلف 400 دينار للطن الواحد، وتكلفة التشغيل هي 250 ديناراً لكل طن من (س)، و200 دينار لكل طن من (ص). ضع هذه المشكلة في صورة برمجة خطية، ثم أوجد الحل لها الذي يجعل التكاليف أقل ما يمكن، مستخدماً طريقة التحليل البياني، علماً بأن الكمية المنتجة التي تزيد عن حجم الطلب اليومي ليست لها قيمة، نظراً للمتغيرات الكيماوية التي ستحصل عليها، إن لم تستخدم في الحال.

س16 ـ مصنع صغير ينتج نوعين من السلع البلاستيكية (S, T)، والتي يتطلب إنتاجها مرورها في عمليتين إنتاجيتين، تجرى العملية الأولى إما في الآلة رقم (1)، أو الآلة (2). وتجرى العملية الثانية إما في الآلة رقم (3)، أو الآلة رقم (4). فإذا كان وقت التشغيل لكل آلة لإنتاج وحدة إنتاجية واحدة، والطاقة الإنتاجية لكل آلة، وتكلفة كل وحدة زمنية عند تشغيل أي آلة من الآلات مبينة في الجدول التالي:

المنتج	الآلـــة			
	الآلة (1)	الآلة (2)	الآلة (3)	الآلة (4)
S	10	6	16	12 دقيقة
T	20	8	12	10دقيقة
الطاقة الإنتاجية	4800	3600	6000	6000 دقيقة
التكلفة/الدقيقة	300	500	300	500 درهم

وكان الطلب على المنتج (S) هو 600 وحدة، و300 وحدة من المنتج (T).

المطلوب/ أوجد الخطة الإنتاجية التي تجعل مجموع خسائر تشغيل الآلات أقل ما يمكن، مستخدماً في ذلك طريقة التحليل البياني.

س17 ـ يحتوي غذاء الأطفال على الأقل 25% من البروتيين، ولا يتعدى 70% من الكربوهيدرات، وهذه المواد هي نسب من مواد أخرى، تمزج لتعطي غذاء الطفل وهي كما يلي:

	A	B	C	D
% كربوهيدرات	80	80	70	60
% بروتين	10	15	20	30
الربح للكيلوجرام بالدينار	5	10	15	20

المطلوب: أوجد الحل الأمثل بواسطة استخدام طريقة السيمبليكس، والذي يجعل الأرباح أكبر ما يمكن؟

س18 ـ مصنع للأقمشة ينتج ثلاثة أنواع من الملابس (A, B, C) التي تحتاج لإنتاجها صوفاً من لونين أحمر وأخضر وتحتاج كل وحدة طولية من (A) لثلاثة أمتار من الصوف الأحمر، ومتر من الأخضر، وتحتاج كل وحدة طولية من (B) لأربعة أمتار من الصوف الأحمر، وثلاثة من الصوف الأخضر. وتحتاج كل وحدة من (C) لمتر واحد من الصوف الأحمر، ومترين من الأخضر. والربح الناتج من بيع الوحدة الطويلة من (A) هو ثلاثة دنانير، ومن (B) هو ستة دنانير، ومن (C) هو ديناران. ولا يمتلك المصنع أكثر من عشرين متراً من الصوف الأحمر، وعشرة أمتار من الصوف الأخضر. كيف يمكن استخدام الصوف المتاح في هذا المصنع لتعظيم الأرباح، وذلك باستخدام السيمبليكس؟

س19 ـ شركة المستلزمات الزراعية لها ثلاث مزارع (A, B, C)، مساحاتها على التوالي (300, 600, 700) هكتار. وتنوي الشركة زراعة تلك المزارع بثلاثة أنواع مختلفة

من المحاصيل (K, L, M)، ويبين الجدول التالي معلومات عن عدد الوحدات التي ينتجها كل هكتار، والحد الأعلى للمبيعات التي يمكن بيعها، والماء المحتاج إليه والربح المتوقع من بيع الوحدة الواحدة من المحاصيل الثلاثة:

المحصول	الوحدة/ هكتار	أعلى المبيعات	الماء/ الهكتار	الربح/ الوحدة
K	25	20000	5	6
L	20	25000	4	4
M	21	850	3	2

فإذا اعتبر الماء المستهلك من العوامل المهمة والمحدودة، وحددت كمية الماء الموجودة في المزارع، فكانت كالآتي: 2800 لتر مكعب في المزرعة (A)، و2000 لتر مكعب في المزرعة (B)، و1000 لتر مكعب في المزرعة (C). ضع هذه المشكلة في صورة برمجة خطية لتقدير ما الذي يجب إنتاجه عند كل مزرعة، علماً بأنه يمكن زرع أية خلطة من تلك المحاصيل في أية مزرعة:

س20 ـ ترغب المؤسسة الوطنية للنفط في نقل النفط الخام من الموانيء الليبية إلى الدول المستوردة للمادة الخام (إيطاليا، ألمانيا، وغيرها). في نفس الوقت تحتاج إلى تحديد حجم ونوع وطبيعة السفن، التي تكون أكثر اقتصاداً قبل التقدم لشرائها، كما ترغب الشركة في عدم صرف أكثر من 400 مليون دينار لمشروع شراء السفن. وقد انتهت المؤسسة إلى اختيار ثلاثة أنواع من هذه السفن بعد أن تبين لها أنها تمثل أفضل الأنواع لنقل المادة الخام بأقل فاقد من المنتج، وأقصى درجة من الأمان، ويمكن أن نرمز إلى هذه الأنواع الثلاثة من السفن بالرمز (C1, C2, C3). السفينة C1 حمولتها 10000 طن وسرعتها 35 ميلاً بحرياً في الساعة، ويقدر ثمنها 8 ملايين دينار. والسفينة (C2) حمولتها 20000 طن وسرعتها 30 ميلاً بحرياً في الساعة، ويقدر ثمنها 13 مليون دينار. أما السفينة (C3) فحمولتها 18000 طن وسرعتها 30 ميلاً بحرياً في الساعة، ويقدر ثمنها 15 مليون دينار. وتمتاز هذه السفينة بأنها مزودة بكاسحات ثلوج، مما يجعلها صالحة للعمل في المناطق المتجمدة التي اكتشف فيها آبار للبترول. وتستخدم السفينة (C1) وقوداً غالي الثمن، ولكن تحرق منه كميات قليلة. ويقدر متوسط مصاريف التشغيل في اليوم بما في ذلك العمالة الخ بحوالي 3000 دينار. أما السفينتان (C2,C3) فتستخدمان وقوداً أقل ثمناً من الذي تستخدمه السفينة (C1) ولكنهما تستهلكان كمية أكبر، ويقدر متوسط مصاريف التشغيل في اليوم لكل منهما 6000 دينار.

وبالنسبة للقيمة الاقتصادية للمنتجات التي تقوم المؤسسة بنقلها، فإن مصاريف التشغيل لكل الأسطول يجب ألا تزيد عن 150000 دينار في اليوم، وقد قدر أنه لن يتاح

أكثر منه 3000 بحار في أي وقت لتزويد طاقم السفن الحديدة، علماً بأن متوسط عدد أفراد طاقم السفينة من أي نوع هو 1000 شخص.

المطلوب: ما هو عدد السفن التي يجب شراؤها من كل نوع إذا أرادت المؤسسة أن تضخم طاقتها من الطن/ميل في اليوم، وذلك باستخدام طريقة السيمبلكس؟.

الفصل الرابع

نماذج النقل

Transportation Models

المقدمة:

مشكلة النقل هي عبارة عن حالة خاصة من حالات البرمجة الخطية، التي سبق نقاشها في الفصل السابق، بمعنى أن هذا النوع من المشاكل يمكن حله باستخدام البرمجة الخطية، إلا أن الأسلوب الذي يوفره نموذج النقل هو أكثر فاعلية وسرعة في الحل. وكذلك يوجد هناك بعض المشاكل لها خصائص ومواصفات تنفرد بها عن بقية المشاكل الخطية، وهذه المشاكل هي ما تعرف بمشاكل النقل. وتعتبر مشكلة (نموذج) النقل من الأساليب الرياضية الهامة المساعدة في عملية اتخاذ القرار الملائم في نقل كمية من المواد (السلع) من مصادر Sources تصنيعها أو المخازن إلى مراكز متعددة Destinations كالمخازن، وذلك بما يجعل مجموع تكاليف هذا النقل أقل ما يمكن. كما تخصص طريقة النقل في توزيع الموارد البشرية والمادية بأفضل صورة على اعتبار أن هذه الموارد محدودة دائماً. إلا أن تطبيقات هذه التقنية اليوم تعدت مجرد النقل المادي للمواد، لتتناول جوانب أخرى مثل: خطط التمويل، تحديد الأعمال التي يجب أن تنفذها الآلات، والتخطيط للدعاية والإعلان وغيرها. والمثال رقم (1) التالي يبين أهم العناصر التي تدخل في مشكلة النقل.

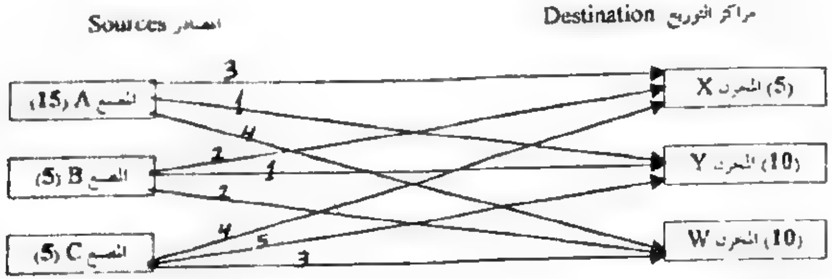
مثال رقم (1):

نفرض أن هناك مشروعاً معيناً في مدينة طرابلس بليبيا، يمتلك **ثلاثة مصانع (A, B, C)** تنتج منتجاً معيناً، وليكن هذا المنتوج أجهزة مرئية (TV)، وأن الطاقة الإنتاجية لهذه المصانع الثلاثة وعلى التوالي هي (5، 5، 15) ونفرض أيضاً أن هذا الإنتاج يتم نقله إلى **ثلاثة مخازن هي (X,Y,W)** طاقتها التخزينية على التوالي (10، 10، 5). ويتم نقل هذه الأجهزة من المصنع A إلى المخازن (X,Y,W) وذلك بتكلفة (4، 1، 3) دينار ليبي للجهاز الواحد على التوالي. كما يتم نقل هذه الأجهزة من المصنع B **إلى المخازن الثلاثة** عند تكلفة قدرها (2، 1، 2) دينار للجهاز الواحد على التوالي. كذلك يتم نقل هذه

الأجهزة من المصنع C **إلى المخازن الثلاثة** عند تكلفة قدرها **(3، 5، 4)** دنانير للجهاز الواحد على التوالي.

المطلوب وضع هذه المشكلة في صورة مشكلة نقل. ثم أوجد الحل الأمثل التي يوضح كيفية نقل هذه الأجهزة من المصانع الثلاثة إلى المخازن الثلاثة وذلك عند أدنى تكلفة ممكنة.

الآن يمكن توضيح هذه المشكلة بيانياً (1 ـ 4) بحيث تتضح فيها المصانع الثلاثة، والمخازن الثلاثة، مصحوبة بالطاقات الإنتاجية والتخزينية، كما تمثل الأسهم خطوط النقل من المصانع إلى المخازن، مقرونة بتكلفة كل خط على حدة.



جدول (1 ـ 4) المصانع الثلاثة والمخازن الثلاثة، مصحوبة بالطاقات الإنتاجية والتخزينية

وتعتبر مشكلة النقل فصيلة رياضية من فصائل البرمجة الخطية حيث يمكن عرض هذه المشكلة بشكل نموذج برمجة خطية ومعالجته بإحدى الطرق. ولحل مشاكل النقل، فإنه يجب استخدام نفس الخطوات الأساسية لحل مشاكل البرمجة الخطية، ولكن في مشاكل النقل تكون إجراءات الحل مختلفة.

■ الخطوات الأساسية لحل مشاكل النقل

1 ـ تحديد طبيعة مشكلة النقل (الهدف)، هل هي مشكلة تتعلق بالوصول إلى أقل تكلفة (كما هو موجود في المثال السابق) أو تحقيق أعلى ربح ممكن؟

2 ـ بناء نموذج النقل، وإيجاد التوزيع المبدئي الممكن. يوجد هناك العديد من الطرق لإيجاد التوزيع المبدئي منها:

I ـ طريقة الزاوية الشمالية الغربية North West Corner Method

II ـ طريقة الأقل تكلفة أو أقل الأسعار Least Cost Method

III ـ طريقة الجزاء Penalty Method أو طريقة فوجل Vogel's Approximation Method

III ـ طريقة المفاضلة المزدوجة.

ولكي يكون هذا الحل حلاً ممكناً لا بد أن تتوفر فيه الشروط التالية:

I ـ يجب توزيع أو نقل جميع الوحدات الموجودة في أي من المصانع إلى مخازنها (العرض = الطلب).

II ـ يجب ألا يكون هناك أية فراغات غير مستغلة في أي مخزن من المخازن.

III ـ يجب أن يتساوى عدد الخلايا أو الحجيرات أو المربعات المستخدمة مع عدد الصفوف، مضافاً إليها عدد الأعمدة، ومطروحاً منها واحد (m + n -1).

3 ـ يجب استخدام إحدى الطرق الأخرى للتأكد من أن الحل هو الحل الأمثل أم لا، وهذه تتم بإحدى الطرق التالية:

I ـ طريقة التوزيع المعدلة Modified Distributing Method (MODI)

II ـ طريقة حجر التنقل (التخطي) Stepping Stone Method

4 ـ في حالة ما نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل، تكون المشكلة قد حلت. وإن لم يكن كذلك. فيجب الانتقال إلى حل ممكن أفضل.

5 ـ يجب الرجوع إلى الخطوة الثالثة مرة أخرى، لمعرفة ما إذا كان الحل الأخير المتحقق في الخطوة التالية هو الحل الأمثل. . . وهكذا.

أولاً: مشكلة البحث عن أقل تكلفة ممكنة:

حل مثال رقم (1) المتعلق بالبحث عن أقل تكلفة ممكنة:

جدول (2 ـ 4) ملخص للمشكلة

المصانع	X	Y	W	الطاقة المنتجة للمصانع (العرض)
A	3	1	4	15
B	2	1	2	5
C	4	5	3	5
السعة التخزينية للمخازن (الطلب)	5	10	10	

(المخازن: X، Y، W)

الجدول (2 ـ 4) يمثل ملخصاً للمشكلة المطروحة وهو من النوع (3 × 3) أي ثلاثة مصانع في ثلاثة مخازن، حيث إن القيمة الموجودة داخل الحجيرة أو الخلية (A X) تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر (المصنع) (A) إلى الوجهة (المخزن) (X). أما هدفنا من نموذج النقل فهو إيجاد أقل تكلفة لنقل المواد من المصانع المختلفة إلى المخازن المختلفة وذلك من خلال عدد المواد المراد نقلها من مصنع ما إلى مخزن ما ولكافة المصانع والمخازن ويمكن تحقيق هذا الهدف وذلك من خلال حل المعادلات الخطية التالية:

النموذج الرياضي لمشكلة النقل:

بافتراض أن عدد الأجهزة التي يتم نقلها من المصنع A إلى المخزن X يرمز لها بالرمز T11 . . . وهكذا بالنسبة لبقية الأجهزة التي سوف تنقل من مصانعها إلى مخازنها يرمز لها حسب موقع الخلية أو الحجيرة مع الرمز (T) الذي يمثل عدد الأجهزة التي سوف تنقل.

دالة الهدف:

$$Min.Z\ cost = 3T11 + 1T12 + 4T13 + 2T21 + 1T22 + 2T23 + 4T31 + 5T32 + 3T33$$

القيود:

$$T11 + T12 + T13 = 15$$

$$T21 + T22 + T23 = 5$$

$$T31 + T32 + T33 = 5$$

وأن

$$T11 + T21 + T31 = 5$$

$$T12 + T22 + T32 = 10$$

$$T13 + T23 + T33 = 10$$

ولإيجاد قيمة التكلفة (Cost) لا بد من حل هذه المعادلات لاستخراج عدد الأجهزة المراد نقلها من مصدر ما (المصنع) إلى وجهة ما (المخزن)، وكلما زاد عدد هذه المعادلات (زيادة عدد المصادر أو زيادة عدد الوجهات أو زيادة عدد المصادر والجهات معاً) زادت صعوبة حلها. ولتفادي حل هذه المعادلات تستخدم عدة طرق لإيجاد التكلفة نبرز منها:

■ طرق لإيجاد التوزيع المبدئي:

1 ـ طريقة الزاوية الشمالية الغربية North West Corner Method:

يتم استخدام هذه الطريقة لإيجاد التكلفة، وذلك حسب الخطوات التالية:

- إبدأ بأول خلية أو حجيرة أو مربع من اليسار والذي يقع في الزاوية الشمالية الغربية.
- إختر عدد المواد (الأجهزة TV) ليصبح مساوياً لعدد الطلبيات (طاقة التخزين) أو العرض (طاقة إنتاج المصنع) أيهما أقل.
- إطرح عدد المواد من الطلب والعرض وصفر عدد المواد باتجاه الطلبيات إذا كانت نتيجة الطلب مساوية للصفر (بعد عملية الطرح) أو باتجاه العرض إذا كانت نتيجة العرض مساوية للصفر.
- إنتقل إلى المربع الذي يليه.
- إذا كانت قيمة المواد في أحد المربعات مساوية للصفر فاقفز عنه.
- لاحظ أن عملية المرور بالمربعات أو الخلايا تكون بشكل تتابعي في السطر الواحد وباتجاه اليمين وعند الانتهاء من السطر يتم الانتقال إلى السطر الثاني وهكذا.

يمكن الآن استخدام المثال رقم (1) لإيجاد أقل تكلفة لنقل الأجهزة من ثلاثة مصانع إلى ثلاثة مخازن وذلك بواسطة استخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

جدول (3 ـ 4) يبين التوزيع حسب طريقة الزاوية الشمالية الغربية

الزاوية الشمالية الغربية

المصانع	المخازن X	Y	W	الطاقة الإنتاجية للمصانع (العرض)
A	3	1	4	15
B	2	1	2	5
C	4	5	3	5
السعة التخزينية للمخازن (الطلب)	5	10	10	

لاحظ أن القيمة التي بداخل المربعات أو الحجيرات أو الخلايا تمثل تكلفة نقل جهاز واحد من المصنع إلى المخزن وهي كما يلي:

$$AX = 3, AY = 1, AW = 4$$

$$BX = 2, BY = 1, W = 2$$

$$CX = 4, CY = 5, CW = 3$$

الآن يمكن اختصار الجدول السابق كالتالي:

جدول (4 ـ 4) المختصر

3	1	4	15
2	1	2	5
4	5	3	5
5	10	10	

ـ نبدأ بالزاوية الشمالية الغربية ونحدد عدد الأجهزة التي يسمح بنقلها من المصنع A إلى المخزن X، حيث يصبح عدد الأجهزة المسموح والمتاح نقلها إلى الزاوية الشمالية الغربية تساوي خمسة أجهزة فقط، لأن عدد الأجهزة التي يمكن تخزينها في المخزن X خمسة أجهزة فقط، وهي تمثل أقل من عدد الأجهزة التي تم إنتاجها من المصنع A، وبعد هذا نصفر الأعمدة التي لا يمكن التخزين فيها، لأن الطاقة التخزينية للأجهزة استغلت كلياً في المربع الذي يمثل الزاوية الشمالية الغربية. وبهذا فإن:

$$AX = 5, BX = 0, CX = 0$$

جدول (5 ـ 4)

3 5	1	4	10
2 0	1	2	5
4 0	5	3	5
0	10	10	

ـ ننتقل إلى المربع أو الخلية الأخرى (شريطة أن لا يكون فيها عدد الأجهزة مساوياً للصفر) ونكرر الخطوة الأولى.

جدول (4 ـ 6)

(3) 5	(1) 10	(4) 0	0
(2) 0	(1) 0	(2)	5
(4) 0	(5) 0	(3)	5
0	0	10	

ـ تكرر الخطوة الأولى.

جدول (4 ـ 7)

(3) 5	(1) 10	(4) 0	0
(2) 0	(1) 0	(2) 5	0
(4) 0	(5) 0	(3)	5
0	0	5	

جدول (4 ـ 8)

(3) 5	(1) 10	(4) 0	0
(2) 0	(1) 0	(2) 5	0
(4) 0	(5) 0	(3) 5	0
0	0	0	

وبهذا فإن مجموع التكاليف بعد توزيع كل الأجهزة المصنعة في المخازن المناسبة لها في هذا الجدول السابق تكون كالآتي:

$$\text{Total Transport. Cost} = 5(3) + 10(1) + 0(4) + 0(2) + 0(1) + 5(2) + 0(4) + 0(5) + 5(3)$$
$$= 15 + 10 + 10 + 15 = 50$$

2 ـ طريقة الأقل تكلفة أو أقل الأسعار Least Cost Method :

تتم عملية التوزيع لإيجاد أقل تكلفة باستخدام هذه الطريقة حسب الخطوات التالية:

ـ لاحظ كل المربعات أو الحجيرات أو الخلايا وحدد المربع الذي يمثل أقل تكلفة للوحدة الواحدة، ثم حدد عدد الأجهزة المطلوبة اعتماداً على قيم الطلبيات والعرض المناظرة (أيهما أقل) وصفر الأعمدة باتجاه الصفر.

ـ إنتقل إلى مربع آخر يمثل أقل تكلفة للوحدة الواحدة بعد تطبيق الخطوة الأولى وكرر هذه الخطوة (مع ملاحظة القفز عن المربع الذي عدد الأجهزة فيه يساوي الصفر) وهكذا حتى يتم تصفير الطلب والعرض في كافة الأعمدة Columns والصفوف Rows. وباستخدام المثال رقم (1) يمكن تطبيق هذه الطريقة وهي كالآتي:

جدول (4 ـ 9)

(3)	#	(4)	15
(2)	(1)	(2)	5
(4)	(5)	(3)	5
5	10	10	

ثم اختيار الخلية أو المربع (AY) والذي وضعت له علامة (#)، لأنه يمثل أقل تكلفة أو سعر للوحدة الواحدة من الأجهزة (TV). لاحظ أنه يوجد تكلفة أو سعر آخر في المربع (BY) ومساوية إلى أقل تكلفة السابقة (1)، ولكنه تم اختيار العمود هذا (AY) نظراً لأن الرقم 10 المناظر أعلى من الرقم 5 المناظر للعمود الثاني:

نطبق الخطوة الأولى فنحصل على:

جدول (4 ـ 10)

(3)	(1) 10	(4)	5
#	(1) 0	(2)	5
(4)	(5) 0	(3)	5
5	0	10	

جدول (11 _ 4)

3 / 0	1 / 10	4	5
2 / 5	1 / 0	2 / 0	0
4 / 0	5 / 0	3 / #	5
0	0	10	

جدول (12 _ 4)

3 / 0	1 / 10	4 / #	5
2 / 5	1 / 0	2 / 0	0
4 / 0	5 / 0	3 / 5	0
0	0	5	

جدول (13 _ 4)

3 / 0	1 / 10	4 / 5	0
2 / 5	1 / 0	2 / 0	0
4 / 0	5 / 0	3 / 5	0
0	0	0	

$$Cost = 10(1) + 5(4) + 5(2) + 5(3) = 10 + 20 + 10 + 15 = 55$$

3 ـ طريقة الجزاء Penalty Method او طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation Method:

يمكن تلخيص خطوات إيجاد التكلفة حسب هذه الطريقة في ما يلي:

ـ بناء عمود الجزاء وذلك بأخذ حاصل طرح أقل تكلفتين في الصف المناظر.

ـ بناء صف الجزاء وذلك بأخذ حاصل طرح أقل تكلفتين في العمود المناظر.

ـ تحديد أعلى جزاء واختيار أقل تكلفة مناظرة ثم اختيار الطلب أو العرض (أيهما أقل) لتكون قيمة عدد المواد (الأجهزة) المراد نقلها.

ـ كرر هذه الخطوات حتى تستهلك كافة الطلب والعرض (تصبح فيها مساوية للصفر)

نستخدم نفس المثال السابق (1) لشرح هذه الطريقة:

جدول (14 _ 4)

				عمود الجزاء
3	#	4	15	أعلى الجزاء $(3 - 1) = 2$
2	1	2	5	$(2 - 1) = 1$
4	5	3	5	$(4 - 3) = 1$
5	10	10		
$(3 - 2) = 1$	$(1 - 1) = 0$	$(3 - 2) = 1$		صف الجزاء

جدول (15 _ 4)

				عمود الجزاء
3 / #	1 / 10	4	5	$(4 - 3) = 1$
2	1 / 0	2	5	$(2 - 2) = 0$
4	5 / 0	3	5	$(4 - 3) = 1$
5	0	10		
$(3 - 2) = 1$	-	$(3 - 2) = 1$		صف الجزاء

جدول (16 ـ 4)

3 5	1 10	4 0	0	—	عمود الجزاء
2 0	1 0	2	5	2	
4 0	5 0	3 #	5	3	
0	0	10			
-	-	(3 - 2) = 1			صف الجزاء

جدول (17 ـ 4)

3 5	1 10	4 0	0	-	عمود الجزاء
2 0	1 0	2 5	0	-	
4 0	5 0	3 5	0	-	
0	0	0			
-	-	-			صف الجزاء

$$Cost = 5(3) + 10(1) + 5(2) + 5(3) = 15 + 10 + 10 + 15 = 50$$

ـ لاحظ أن نتائج الطرق الثلاثة قد تختلف. ولكن نلاحظ أن هذه المشكلة لم تحقق القانون $(m + n - 1)$ ويعني هذا أن هذه النتيجة تحدث إلا في حالة واحدة وهي الحالة التي تكون فيها المواد المتاحة في أحد المصادر مساوية تماماً لاحتياجات إحدى الوجهات (المركز التسويقي)، وعند نقل هذه السلع من المصدر إلى هذا المركز فإن هذا سوف يؤدي إلى نفاد هذه السلعة وفي هذه الحالة فإن $(m + n - 1)$ سوف لا تتحقق.

4 ـ طريقة المفاضلة المزدوجة:

إذا كانت مشكلة النقل ذات حجم كبير وبها العديد من الصفوف والأعمدة، فإن اختيار العناصر فيه بالشكل الذي سبق ذكره في الطرق السابقة يكون صعباً ولذا فإنه يفضل استخدام طريقة المفاضلة المزدوجة في هذه الحالة. وتتلخص فكرة هذه الطريقة بما يلي:

ـ في كل عمود نضع الإشارة (V) في الخلية التي يوجد بها أقل تكلفة.

ـ في كل صف نضع الإشارة (V) في الخلية التي يوجد بها أقل تكلفة.

ـ داخل جدول النقل سوف نتحصل على بعض الخلايا التي تحتوي على إشارتين (VV)، وهذا يدل على أن هذه الخلية تحتوي على أقل تكلفة نقل ممكنة من بين هذه الصفوف والأعمدة.

ـ يجب وضع أكبر كمية من الخلية التي تحتوي على الإشارتين (VV)، ونضع خطوط فراغ بالنسبة للخلايا الفارغة.

ـ بعد أن نملأ جميع الخلايا ذات الإشارتين (VV) نجد أن هناك بعض المستهلكين الذين لم يتحصلوا على طلبهم كاملاً أو جزئياً. ولذا نبدأ في ملء المربعات ذات الإشارة (V) وبنفس الأسلوب السابق. وهذا يعني أننا وزعنا باقي الاحتياط على المخازن وذلك حسب القيمة التي تمثل أقل تكلفة لعملية النقل.

جدول (18 ـ 4)

3 .	1 VV	4	15
2 V	1 VV	2 v	5
4	5	3 V	5
5	10	10	

إذاً حسب هذا الجدول نبدأ في ملء الخلايا التي تحتوي على الإشارتين VV ويكون الجدول كالآتي:

جدول (19 ـ 4)

3 v	1 10	4	15
2 vv	1 –	2 vv	5
4	5 –	3 v	5
5	10	10	

كرر نفس الإجراء السابق إلى أن تصل إلى الحل.

جدول (20 ـ 4)

3 –	1 10	4 V	15
2 5	1 –	2 –	5
4 –	5 –	3 VV	5
5	10	10	

جدول (21 ـ 4)

3 –	1 10	4 5	15
2 5	1 –	2 –	5
4 –	5 –	3 5	5
5	10	10	

■ نموذج النقل غير المتوازن Unbalanced Transportation Problem :

في بعض الحالات نجد أن عدد الوحدات المعروضة (العرض) لا تتساوى مع عدد الوحدات المطلوبة (الطلب)، أو بالعكس، فيحدث ما نسميه بعدم التوازن بين العرض والطلب وهذا ما يسمى بالنموذج غير المتوازن. ولإيجاد أقل تكلفة لمشكلة النقل في حالة النموذج غير المتوازن فلا بد أولاً من موازنة النموذج ثم بعد بعد ذلك يمكن استخدام إحدى الطرق السابقة لإيجاد التكلفة. فمثلاً النموذج التالي (مثال رقم 2) يبين عدم التوازن:

جدول (22 ـ 4)

	D1	D2	D3	Supply
S1	2	5	4	10
S2	3	7	6	10
S3	2	8	4	10
Demands	10	15	10	

نلاحظ في الجدول السابق أن مجموع الطلب (35) أكبر من مجموع العرض (30)، ولموازنة هذا النموذج لا بد من إضافة صف جديد (Dummy Row) تكون فيه قيمة

العرض مساوية إلى (5) وتكلفة النقل لكل مداخل هذا السطر تكون مساوية للصفر وهي كما يلي:

جدول (23 ـ 4)

	D1	D2	D3	Supply
S1	2	5	4	10
S2	3	7	6	10
S3	2	8	4	10
S4 (Dummy Row)	0	0	0	5
Demands	10	15	10	

وبعد عملية الموازنة هذه يمكن استخدام إحدى الطرق السابقة لإيجاد تكلفة النقل. وفي بعض الحالات قد يكون مجموع العرض أكبر من مجموع الطلب، وهنا لا بد من إضافة عمود جديد تكون فيه قيمة الطلب مساوية لقيمة الفرق بين العرض والطلب. أما تكلفة كل مدخل من مداخل هذا العمود فتكون مساوية للصفر والمثال التالي (مثال رقم 3) يوضح نموذج النقل وكيفية موازنة هذا النموذج.

جدول (24 ـ 4)

	D1	D2	D3	Supply
S1	2	5	4	10
S2	3	7	6	10
S3	2	8	4	51
Demands	10	10	10	

جدول (25 ـ 4)

	D1	D2	D3	D4 (Dummy)	Supply
10	2	5	4	0	
S1	3	7	6	0	10
S2	2	8	4	0	15
Demands	10	10	10	5	

■ طرق للتأكد من الوصول إلى الحل الأمثل:

بعد استخدام الطرق السابقة لعملية التوزيع وإيجاد التوزيع المبدئي للمشكلة يجب التأكد من أن هذا الحل هو الأمثل والذي يؤدي إلى أقل تكلفة ممكنة. يوجد هناك العديد من الطرق التي تساعدنا إلى الوصول إلى الحل الأمثل ومن بين هذه الطرق هي:

I ـ طريقة حجر التنقل (التخطي) Stepping Stone Method:

سوف نبين كيفية استخدام هذه الطريقة من خلال المثال رقم (4) التالي: لنفرض أن الجدول الآتي يبين العرض والطلب والتكاليف اللازمة لعملية النقل بين المصدر والمستهلك.

جدول (26 ـ 4)

	D1	D2	D3	D4	S3 Supply
2500	3	2	7	6	5000
S1	7	5	2	3	
S2	2	5	4	5	6000
Demands	6000	4000	2000	1500	13500

1 ـ وضع التوزيع في صورة جدول وإجراء التوزيع المبدئي:

من خلال هذا الجدول يمكن استخدام إحدى الطرق السابقة (طريقة الزاوية الشمالية الغربية أو طريقة الأقل تكلفة أو طريقة الجزاء) لتوزيع هذه الكميات داخل المربعات أو

الخلايا أو الحجيرات بداخل الجدول، ولو فرضنا في هذا المثال أننا استخدمنا طريقة الأقل تكلفة يكون التوزيع كالآتي:

جدول (27 ـ 4)

	D1	D2	D3	D4	S3 Supply
2500	3 / 1000	2 / 4000	7	6	5000
S1	7 / 2500	5	2 / 2000	3 / 1500	
S2	2 / 2500	5	4	5	6000
Demands	6000	4000	2000	1500	13500

مجموع التكاليف $1000(3) + (2)4000 + (7)2500 + (2)2000 + (3)1500 + (2)2500 =$
$= 42000 = 5000 + 4500 + 4000 + 17500 + 8000 + 3000 =$

2 ـ تقويم الخلايا غير المستغلة على طريقة الحجر المتنقل:

يتم بهذه الطريقة الوصول إلى الحل الأمثل وذلك عن طريق أخذ جدول الحل النهائي حيث تمثل المواقع أو المربعات أو الخلايا المشغولة فيه بالصخور (المملوءة بالكميات) والحقول غير المشغولة بالحقول المائية (غير المملوءة بالكميات) ويتم تكوين طريق مغلق يبدأ من الموقع المائي (الخلية التي لا توجد بها الكميات) في الجدول (28 ـ 4) وباتجاه الصخور (الخلايا التي بها الكميات) حتى الرجوع لهذا الموقع، وبهذا يظهر جدول الحل النهائي كما يلي:

جدول (28 ـ 4)

	D1	D2	D3	D4	S3 Supply
2500	3 / 1000	2 / 4000	7	6	5000
S1	7 / 2500	5	2 / 2000	3 / 1500	
S2	2 / 2500	5	4	5	6000
Demands	6000	4000	2000	1500	13500

الآن يمكن أن نستخرج التكلفة المتزايدة أو المتناقصة لكل مربع أو خلية لا توجد

فيها الكمية المطلوبة من قبل المستهلك. وذلك عن طريق البدء بالخلية S1 D3 وإعطائها الإشارة الموجبة ثم الانتقال إلى الخلية (S2 D3)وإعطائها الإشارة السالبة، ثم إلى الخلية (S2 D1) وإعطائها الإشارة الموجبة، ثم الانتقال إلى الخلية (S1 D1) وإعطائها الإشارة السالبة، ثم أخيراً الرجوع إلى الخلية السابقة (S1 D3). ويتم حساب التكلفة كالآتي:

$$S1\ D3 = 7 - 2 + 7 - 3 = 9$$

$$S1\ D4 = 6 - 3 + 7 - 3 = 7$$

$$S2\ D2 = 5 - 7 + 3 - 2 = -1$$

(تكلفة النقل من الممكن أن تخفض بدينار واحد لكل وحدة واحدة)

$$S3\ D2 = 5 - 2 + 3 - 2 = 4$$

$$S3\ D3 = 4 - 2 + 7 - 2 = 7$$

$$S3\ D4 = 5 - 2 + 7 - 3 = 7$$

إذا هذه القيم يمكن إدراجها في الجدول التالي:

جدول (29 ـ 4)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	(3) 1000	(2) 4000	(7) 9	(6) 7	5000
S2	(7) 2500	(5) -1	(2) 2000	(3) 1500	6000
S3	(2) 2500	(5) 4	(4) 7	(5) 7	2500
Demands	6000	4000	2000	1500	13500

من المعروف، عندما نصل إلى الحل الأمثل، أن جميع القيم تكون موجبة أو تساوي صفراً. ولكن بالنظر إلى الجدول (29 ـ 4)، نلاحظ أن جميع القيم الناتجة لم تكن موجبة أو تساوي صفراً، بل هناك خلية واحدة في (D2 S2) (الخلية المظللة) قيمتها تساوي(1 ـ)، ويعني ذلك بأن التكاليف يمكن تخفيضها بدينار واحد للوحدة الواحدة التي تقع داخل نطاق هذه الخلية.

3 ـ تعديل التوزيع بنتائج تقويم الخلايا غير المستغلة:

لاشك أننا كنا نهدف من تقويم الخلايا (غير المستغلة) إلى اختبار إمكانية تحسين برنامج التوزيع بما يؤدي إلى تحقيق تخفيض في التكاليف. فإذا ما عرفنا أن شرط عدم التحلل يلزمنا باستخدام خلية واحدة غير مستغلة في الجولة الواحدة فإنه يصبح من

المفضل أن نختار من بين الخلايا غير المستغلة تلك التي تحقق تحقيق أكبر وفورات في التكاليف (أي تلك التي تكون نتيجة تقويمها أكبر قيمة مطلقة بإشارة سالبة). وفي هذا المثال نجد أن هناك خلية واحدة هي (S2 D2) (الخلية المظللة) قيمتها تساوي (1 ـ). ولكن ما هو الحد الأقصى لعدد الوحدات التي يمكن نقلها خلال الخلية المختارة؟

لنحدد مسار تقويم الخلية المختارة (S2 D2) ثم الكميات الموجودة حالياً في كل خلية من خلايا المسار كالآتي:

مسار الخلية (S1 D2) - (S1 D1) + (S2 D1) - (S2 D2) + (S2 D2)

الكميات الموجودة = صفراً، 2500، 1000 4000،

لاحظ أن المسار لابد وأن يتكون من عدد زوجي من الخلايا (في هذه الحالة تساوي 4) وأن نصف هذا العدد تسبقه إشارة موجبة بينما النصف الآخر تسبقه إشارة سالبة. ويطلق على الخلايا الموجبة في المسار «الأركان الموجبة» كما يطلق على الخلايا السالبة «الأركان السالبة». فالإشارة (+) تعني الحاجة إلى وضع عدد من السلع في الموقع أما الإشارة السالبة (ـ) فتعني إمكانية الأخذ **ويتحدد الحد الأقصى للوحدات التي يمكن نقلها خلال الخلية غير المستغلة والمرغوب استغلالها، بأقل الوحدات الموجودة في كل من الأركان السالبة** (وهي في هذه الحالة تساوي 2500 وحدة الموجودة في الخلية (S2 D1). ويترتب على ذلك أن إعادة التوزيع يجب أن تكون كالآتي:

أنقل 2500 وحدة من (S2 D1) إلى (S1 D1) ثم انقل 2500 وحدة من (S1 D2) إلى (S2 D2). وإذا ما نفذنا ذلك يصبح التوزيع الجديد كالمبين في الجدول التالي:

جدول (30 ـ 4)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	(3) 3500	(2) 1500	(7)	(6)	5000
S2	(7)	(5) 2500	(2) 2000	(3) 1500	6000
S3	(2) 2500	(5)	(4)	(5)	2500
Demands	6000	4000	2000	1500	13500

مجموع التكاليف 1500 (2) + (3) 2500 + (5) 2000 + (2) 1500 + (3) 2500 (2)
= (3) 3500 +

39500 = 5000 + 4500 + 4000 + 12500 + 3000 + 10500 =

لاحظ أن الوفورات الناتجة من هذا التعديل والبالغ قدرها (42000 ـ 39500 =

2500) تساوي عدد الوحدات المنقولة خلال الخلية (S2 D2) مضروباً في الوفر الناتج عن نقل وحدة واحدة خلال (S2 D2)، أي = 2500 (1 ـ) = ـ2500 = تخفيض في التكاليف.

4 ـ كرر الخطوات الثانية والثالثة إلى أن تصل إلى برنامج التوزيع الأمثل:

تتكرر كل من الخطوتين السابقتين حتى نصل إلى نقطة يصبح فيها تقويم كل الخلايا غير المستغلة أرقاماً موجبة، بمعنى عدم إمكانية تحقيق أي وفورات في التكاليف بإجراء أي تغيير في برنامج النقل. فوجود رقم سالب يمثل تقويم أحد الخلايا غير المستغلة بمعنى أن استغلال هذه الخلية سوف يؤدي إلى تحقيق خفض في التكاليف يساوي هذا الرقم مضروباً في عدد الوحدات التي يمكن أن يتم نقلها خلالها. أما وجود رقم موجب في أية خلية غير مستغلة فيعني أن استغلال هذه الخلية سيؤدي إلى زيادة التكاليف بمقدار هذا الرقم مضروباً في عدد الوحدات التي يتم نقلها خلالها.

ولنقم الآن بملاحظة الخلايا غير المستغلة في الجدول التالي:

جدول (31 ـ 4)

S3

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	3 3500	-2 1500 −	7 +	6	5000
S2	7	5 + 2500	2 − 2000	3 1500	6000
S3	2 2500	5	4	5	2500
Demands	6000	4000	2000	1500	13500

S1 D3 = 7 - 2 + 5 - 2 = 8

S1 D4 = 6 - 3 + 5 - 2 = 6

S2 D1 = 7 - 3 + 2 - 5 = 1

S3 D2 = 5 - 2 + 3 - 2 = 4

S3 D3 = 4 - 2 + 3 - 2 + 5 - 2 = 6

S3 D4 = 5 - 2 + 3 - 2 + 5 - 3 = 6

جدول (32 ـ 4)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	3 3500	2 1500	7 8	6 6	5000
S2	7	5 2500	2 2000	3 1500	6000
S3	2 2500	5 4	4 6	5 6	2500
Demands	6000	4000	2000	1500	13500

ويتبين من تقويم الخلايا غير المستغلة في الجدول أن هذا هو التوزيع الأمثل للكميات في مصادر العرض الثلاثة على مراكز الطلب الأربعة، وذلك لعدم وجود أي قيمة سالبة لأي خلية غير مستغلة في الجدول. ويعني ذلك أن استغلال أي من الخلايا غير المستعملة يؤدي إلى زيادة التكلفة. ويكون برنامج التوزيع الأمثل كما في الجدول (33 ـ 4)

جدول (33 ـ 4)

Supply	Demands	عدد الوحدات	تكلفة الوحدة	التكلفة الكلية
S1	D1	3500	3	10500
S1	D2	1500	2	3000
S2	D2	2500	5	12500
S2	D3	2000	2	4000
S2	D4	1500	3	4500
S3	D1	2500	2	5000
	الإجمالي	13500		39500

II ـ طريقة التوزيع المعدلة Modified Distributing Method (MODI):

هذه الطريقة لا تختلف عن طريقة حجر التنقل (التخطي) كثيراً، إلا أنها تؤدي إلى روتين أكثر كفاءة في تحديد أفضل الخلايا المائية الواجب استخدامها.

خطوات طريقة التوزيع المعدلة:

1 ـ إعداد جدول التوزيع وإجراء التوزيع الحكمي الأول:

بعد التوصل إلى الحل وذلك عن طريق استخدام إحدى طرق التوزيع السابقة، يجب التأكد من أن عدد الحقول المشغولة في الجدول النهائي وذلك بواسطة القانون (m + n - 1) حيث m تساوي عدد المصادر (العروض)، n تساوي عدد الوجهات

(الطلبات). وتؤدي طرق حل مشكلة النقل المختلفة إلى هذه النتيجة إلا في حالة واحدة وهي الحالة التي تكون فيها المواد المتاحة من السلع في أحد المصادر مساوية تماماً لاحتياجات إحدى الوجهات، وعند نقل هذه السلع من المصدر إلى هذا المركز فإنه سوف يؤدي إلى نفاد هذه السلعة. وفي هذه الحالة فإن (m + n - 1) سوف لا تتحقق إلا من التأكد من أن الحل الذي تم التوصل إليه هو الأمثل عند تحقق شرط المساواة. نلاحظ من جدول الحل النهائي للمثال السابق أن عدد الحقول (المربعات) المشغولة هو (6)، وبهذا فإن هذا الرقم يساوي (m + n -1) (3 + 4 - 1) وبهذا يمكن التأكد من أن الحل هذا هو الأفضل.

تتميز هذه الطريقة بأنه عندما يتم تحديد التوزيع المبدئي، يتم احتساب مقدار معين لكل صف ولكل عمود في مصفوفة التوزيع ليتم استخدامها في تقويم المربعات أو الخلايا المائية. فمثلاً إذا رمزنا للصف بالرمز (Ui)، حيث (U1) تعني الصف الأول، (U2) تعني الصف الثاني... وهكذا. وإذا رمزنا للعمود بالرمز (Vj) حيث (V1) تعني العمود الأول، (أنظر إلى الجدول التالي)، فإن كل خلية لابد وأن تقع في صف معين وعمود معين. وبذلك فإذا كانت:

Ui = القيمة المعطاة للصف i

Vj = القيمة المعطاة للعمود j

فإن (Cij) = تكلفة (أو ربح) نقل الوحدة خلال الخلية التي تقع في الصف (I) والعمود (j)، فإننا نقوم بتحديد قيمة كل من Cj, Ci من المعادلة التالية:

التكلفة (أو الربح) Cij = Ui + Vj

جدول (34 ـ 4)

	D1	D2	D3	D4	Supply	
S1	3 / 1000	2 / 4000	7	6	5000	U1
S2	7 / 2500	5	2 / 2000	3 / 1500	6000	U2
S3	2 / 2500	5	4	5	2500	U3
Demands	6000	4000	2000	1500	13500	
	V1	V2	V3	V4		

2 ـ تحديد قيمة كل من Cj, Ci:

تكون العلاقات المحددة لقيمة كل من Vj, Ui كالآتي:

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

$$U_1 + V_1 = 3$$

$$U_1 + V_2 = 2$$

$$U_2 + V_1 = 7$$

$$U_2 + V_3 = 2$$

$$U_2 + V_4 = 3$$

$$U_3 + V_1 = 2$$

ملاحظة: المعادلات السابقة تتعلق فقط بتكلفة الوحدة الواحدة (Cij) للخلية أو المربع المملوء بالكميات. وكذلك في هذه الحالة وجود ست معادلات في سبعة مجاهيل هي (U3, U2, U1, V4, V3, V2, V1). ويترتب على ذلك عدم إمكانية تحديد قيمة أي من المجاهيل ما لم تتحدد قيمة إحداها خارج النموذج. ونظراً لوجود أكثر من متغير واحد، من خلال هذا نستطيع أن نفرض واحداً من المتغيرات بقيمة صفر مثلاً (U1 = 0)، (عادة يحدد الصف أو العمود الذي يوجد به أكبر عدد من الكميات (مثلاً الصف S1 أو العمود D1) وبذلك نستطيع أن نتحصل على قيمة المتغيرات الأخرى وهي كالآتي:

$$0 + V_1 = 3$$

$$0 + V_2 = 2$$

$$U_2 + V_1 = 7$$

$$U_2 + V_3 = 2$$

$$U_2 + V_4 = 3$$

$$U_3 + V_1 = 2$$

بحل المعادلات السابقة وإيجاد قيمة (U, V) وهي كالآتي:

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = 4$$

$$U_3 = -2$$

$$V_1 = 3$$

$V2 = 2$

$V3 = -2$

$V4 = -1$

وهذه القيم تظهر في جدول التوزيع السابق بقيم كل من (Ui, Vj) كما في الجدول (4 ـ 35).

جدول (4 ـ 35)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	3 1000	2 4000	7	6	5000 U1 = 0
S2	7 2500	5	2 2000	3 1500	6000 U2 = 4
S3	2 2500	5	4	5	2500 U3 = 1
Demands	6000	4000	2000	1500	13500
	V1 = 3	V2 = 2	V3 = -2	V4 = -1	

والواقع أنه ليس من الضروري كتابة المعادلات السابقة لاحتساب قيمة كل من (Ui, Vj) حيث يمكن تحديدها ذهنياً بالمران.

3 ـ تقويم الخلايا أو المربعات غير المملوءة بالكميات عن طريق استخدام المعادلة الآتية:

$$\boxed{Eij = Cij - Ui - Vj}$$

حيث (Eij) = القيمة المعطاة للخلية أو المربع غير المملوء بالكميات، وتعني التغير في التكاليف.

لاحظ أننا نستخدم قيم (Ui, Vj) (التي يتم إيجادها عن طريق تكلفة الخلايا أو المربعات المملوءة التي توجد بها كميات) لإيجاد الخلايا أو المربعات غير المملوءة بالكميات وليس العكس. وباتباع هذه المعادلة تكون الخلايا أو المربعات غير المملوءة بالكميات كالآتي:

$$Eij = Cij - Ui - Vj$$

$$Eij = Cij - U1 - V3 = 7 - 0 - (-2) = 9$$

$$Eij = Cij - U1 - V4 = 6 - 0 - (-1) = 7$$

$$Eij = Cij - U2 - V2 = 5 - 4 - 2 = -1$$

$$Eij = Cij - U3 - V2 = 5 - (-1) - 2 = 4$$

$$Eij = Cij - U3 - V3 = 4 - (-1) - (-2) = 7$$

$$Eij = Cij - U3 - V4 = 5 - (-1) - (-1) = 7$$

يمكن وضع هذه القيم في جدول كما هو في الجدول (4 ـ 36).

جدول (4 ـ 36)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	3 1000	2 4000	7 9	6 7	5000 U1 – 0
S2	7 2500	5 -1	2 2000	3 1500	6000 U2 = 3
S3	2 2500	5 4	4 7	5 7	2500 U3 = 1
Demands	6000	4000	2000	1500	13500
	V1 = 3	V2 = 2	V3 = -1	V4 = -0	

الآن يجب ملاحظة القيم التي تحصلنا عليها من خلال القانون السابق؛ فإذا كانت كل القيم موجبة أو صفرية فإن هذا يعني أن الحل هو الأمثل، أما إذا احتوى على قيم سالبة فإن هذا يعني أن الحل ليس هو الأمثل. ففي هذا المثال نجد أننا لم نصل إلى الحل الأمثل لأنه يوجد أحد القيم سالبة (ـ 1) وتقع في الخلية أو المربع (S2, D2). وهذه الخلية أو المربع الذي توجد به القيمة السالبة، تعني بأنه سوف تخفض التكلفة بمقدار دينار للوحدة الواحدة التي يتم نقلها من هذه الخلية. وبمقارنة هذا التقويم بما سبق أن توصلنا إليه في نفس المرحلة باتباع طريقة الحجر المتنقل نجد أنه لا توجد أي اختلافات على الإطلاق.

3 ـ تعديل التوزيع طبقاً لتقويم الخلايا المائية:

في الجدول السابق نجد أن القيم التي تحصلنا عليها هي نفسها مساوية للقيم التي وجدناها عندما اتبعنا طريقة الحجر المتنقل (التخطي). نجد أن لدينا خلية واحدة تؤدي إلى نفس الوفر في التكلفة وهي (S2 D2) ومقداره دينار واحد لكل وحدة واحدة يتم نقلها من هذه الخلية. ويتبع نفس الإجراءات التي استخدمناها في طريقة التخطي وذلك لإعادة توزيع الكميات. ويكون التوزيع الجديد كما في الجدول (4 ـ 37).

جدول (37 ـ 4)

	D1	D2	D3	D4	Supply	
S1	(3) 3500	(2) 1500	(7) <u>8</u>	(6) <u>6</u>	5000	U1 = 0
S2	(7) <u>1</u>	(5) 2500	(2) 2000	(3) 1500	6000	U2 = 3
S3	(2) 2500	(5) <u>4</u>	(4) <u>6</u>	(5) <u>6</u>	2500	U3 = -1
Demands	6000	4000	2000	1500	13500	
	V1 = 3	V2 = 2	V3 = -1	V4 = 0		

نلاحظ أن الجدول (37 ـ 4) يمثل التوزيع الأمثل، وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها حسب طريقة التخطي.

ملخص الخطوات المتبعة

1 ـ ضع بيانات المشكلة في صورة مصفوفة توزيع (جدول).

2 ـ قم بإجراء التوزيع المبدئي الأول عن طريق اتباع إحدى طرق التوزيع (طريقة الأقل تكلفة أو طريقة الزاوية الشمالية الغربية. . . وغيرها).

3 ـ تأكد من أن المشكلة بعد إجراء هذا التوزيع غير متحللة وذلك عن طريق التأكد من صحة المعادلة: عدد الخلايا المستغلة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة ـ 1).

4 ـ قم بإيجاد قيمة كل الخلايا المائية (الخلايا غير المستغلة) وذلك عن طريق تحديد مسار تقويم كل خلية على حدة واحتساب الوفورات في التكاليف (الأرقام السالبة) والزيادات في التكاليف (الأرقام الموجبة) التي تترتب على نقل وحدة واحدة من خلال هذه الخلية.

5 ـ إختر من بين الخلايا المائية تلك التي تؤدي إلى تحقيق أقصى الوفورات في التكاليف (الخلية ذات أكبر قيمة مطلقة بإشارة سالبة) وفي حالة تساوي خليتين أو أكثر اختر من بينها تلك التي يمكن نقل أكبر عدد من الوحدات خلالها ـ كما يتبين من الخطوة التالية. إذا كانت قيم الخلايا المائية موجبة فقد توصلت إلى التوزيع الأمثل.

6 ـ احسب الحد الأقصى لعدد الوحدات التي يمكن نقلها من خلال الخلية المختارة عن طريق تحديد الأركان الموجبة والأركان السالبة لمسار تقويم الخلية ـ إختر أقل الوحدات من الأركان السالبة ـ ويمثل هذا العدد الحد الأقصى للوحدات التي يمكن نقلها من خلال الخلية المختارة.

7 ـ قم بإعادة التوزيع على أساس الخلية المختارة.

8 ـ كرر الخطوات من 3 إلى 7 إلى أن تصل إلى برنامج التوزيع الأمثل.

مشكلة التحلل Degeneracy Problem:

مشكلة التحلل تحدث عندما تقوم بإجراءات أو خطوات الحل لمشكلة معينة، فيتضح من أحد الجداول أن التوزيع الجديد ترتب عليه انخفاض في عدد الخلايا المستغلة (مثلاً من 6 إلى 5 خلايا)، مما يصبح معه من المستحيل إيجاد قيمة كل من بعض الخلايا. كما يترتب عليه أيضاً عدم إمكانية تقويم كل الخلايا غير المستغلة طبقاً لهاتين الطريقتين، وتسمى المشكلة بهذه الحالة بالمشكلة المتحللة، وذلك لأن شرط عدم التحلل أصبح غير مستوف. المثال التالي (مثال 5) يبين ذلك.

جدول (38 ـ 4)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	(4) 300	(1) -7	(6) -4	(5) -4	300
S2	(3) 50	(7) 200	(2) -7	(6) -3	250
S3	(3) 4	(3) 150	(5) 200	(4) 250	600
Demands	350	350	200	250	1150

لاحظ الخلايا المملوءة أو المستغلة بالكميات في هذا الجدول، نجد عددها يساوي 6 خلايا، وهذا يتفق مع الشرط (m + n -1). ويمكن توضيح ذلك كالآتي:

عدد الخلايا المستغلة = [(عدد الصفوف + عدد الأعمدة) ـ 1] = عدد الخلايا المستغلة = 6 = [(1 ـ (4 + 3)]

ويسمى هذا الشرط بشرط عدم تحلل المشكلة أو عدم سيرها في حلقة مفرغة Non Degeneracy Condition. وهذا الجدول لا يمثل التوزيع الأمثل وذلك لوجود العديد من القيم السالبة. والآن نبدأ في اختيار أكبر قيمة بالسالب وذلك لغرض تعديل التوزيع. فنجد في هذا الجدول خليتين متساويتين في القيمة (7 ـ) وهما الخلية (S1 D2), (S2 D3). فلو اخترنا الخلية (S2 D3) لأنه في هذه الخلية يكون فيها أكبر كمية يمكن نقلها (200 وحدة). ويكون التوزيع الجديد كما هو مبين في الجدول (39 ـ 4).

جدول (39 ـ 4)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	(4) 300	(1)	(6)	(5)	300
S2	(3) 50	(7)	(2) 200	(6)	250
S3	(3)	(3) 350	(5)	(4) 250	600
Demands	350	350	200	250	1150

يتضح من الجدول (39 ـ 4) أن التوزيع الجديد ترتب عليه انخفاض عدد الخلايا المستغلة إلى خمس خلايا، مما يصبح معه من المستحيل إيجاد قيمة بعض الخلايا، ويترتب عليه أيضاً عدم إمكانية تقويم كل من الخلايا غير المستغلة طبقاً لهاتين الطريقتين: مثلاً الخلية (S1 D1), (S1 D4), (S2 D2), (S2 D4), (S3 D1), (D3 S3) وتسمى المشكلة بهذه الحالة بالمشكلة المتحللة، وذلك لأن شرط عدم التحلل أصبح غير مستوف.

إختبار مشكلة التحلل ومعالجة الوضع إذا اقتضى الأمر:

يمكن علاج هذه المشكلة المتحللة وذلك عن طريق إضافة خلية أخرى للخلايا المستغلة حتى نتمكن من تقويم باقي الخلايا، سواء كان ذلك التقويم يتم عن طريق اتباع طريقة التوزيع المعدلة أو طريقة التخطي. ولنفرض أننا أضفنا عدداً صغيراً جداً من الوحدات (مثلاً قيمة قريبة من الصفر) لإحدى الخلايا غير المستغلة بحيث لا يؤثر ذلك على شرط التوازن. بمعنى أن عدد الوحدات المضافة ضئيل جداً بحيث يترتب على إهماله عدم التأثير في إجمالي الطلب أو العرض. ولنرمز لهذا الحجم الضئيل بالرمز (n) ونضعه في إحدى الخلايا غير المستغلة لتحويلها إلى خلية مستغلة (لاحظ أننا وضعنا هذا الرمز في الخلية (S3 D1) (المظللة)) يترتب على ذلك أن عدد الخلايا المستغلة أصبح مساوياً لعدد الصفوف زائداً عدد الأعمدة ناقصاً واحداً. ومن ثم أصبح شرط عدم التحلل مستوفياً. والآن يمكن احتساب قيمة التكلفة المتناقصة أو المتزايدة لكل خلية غير مستغلة عن طريق استخدام الكميات الموجودة في الخلايا المستغلة بما فيها الخلية (n). كما سبق في الخطوات السابقة.

جدول (40 ـ 4)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	(4) 300	(1) ـ3	(6) 3	(5) 0	300
S2	(3) 50	(7) 4	(2) 200	(6) 2	250
S3	(3) n	(3) 350	(5) 3	(4) 250	600
Demands	350	350	200	250	1150

لاحظ القيم في الخلايا غير المستغلة، فنجد الخلية (S1 D2)قيمتها سالبة (3ـ)، وهذا يعني أننا لم نصل إلى التوزيع الأمثل، لأن هذه الخلية سوف تخفض التكاليف بقيمة ثلاثة دنانير للوحدة الواحدة للكميات الواقعة في نطاق هذه الخلية. ويتم تكرار الخطوات السابقة حتى نصل إلى التوزيع الأمثل. ويكون تعديل التوزيع الجديد في الجدول (41 ـ 4).

جدول (41 ـ 4)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	(4) 3	(1) 300	(6) 6	(5) 3	300
S2	(3) 50	(7) 4	(2) 200	(6) 2	250
S3	(3) 300	(3) 50	(5) 3	(4) 250	600
Demands	350	350	200	250	1150

في الجدول (41 ـ 4) يجب علينا أن نتأكد من معالجة مشكلة التحلل بعد اختبارها. وبإجراء هذا الاختبار على الجدول (41 ـ 4) السابق، نجد أن عدد الخلايا المستغلة يساوي 6 وأن (عدد الصفوف + عدد الأعمدة ـ 1) يساوي 6. وبذلك فالمشكلة أصبحت غير متحللة، كما أننا تخلصنا من (n) في الخلية (S3 D1) (حيث 300 + n قريبة من الصفر = 300). والآن يقتضي الأمر حساب قيم كل الخلايا غير المستغلة وحساب التكلفة المتناقصة أو المتزايدة للوحدة الواحدة، وقد قمنا بذلك كما هو مبين في الجدول (42 ـ 4).

كل القيم الموجودة في الخلية غير المستغلة موجبة وهذا يعني أن هذا هو التوزيع الأمثل. ويكون التوزيع الأمثل كما في الجدول (42 ـ 4).

جدول (42 ـ 4)

Supply	Demands	عدد الوحدات	تكلفة الوحدة	التكلفة الكلية
S1	D2	300	1	300
S2	D1	50	3	150
S2	D3	200	2	400
S3	D1	300	3	900
S3	D2	50	3	150
S3	D4	250	4	1000
الإجمالي		1150		2900

الطريقتان ومشكلة التحلل:

مما سبق نلاحظ أن الطريقتين ـ طريقة التخطي وطريقة التوزيع المعدلة ـ تؤديان إلى نفس النتيجة. غير أن طريقة التوزيع المعدلة تعتبر أكثر كفاءة في تقويم الخلايا غير المستغلة (الخلايا المائية)، وكلاهما يؤدي إلى نفس الخفض في التكلفة. ولكن تحلل المشكلة كما سبق ورأينا لا يؤدي إلى مشاكل عويصة ويمكن التغلب عليه بسهولة. فإذا أظهر في تقويم الخلايا غير المستغلة أن أكثر من واحدة منها تؤدي إلى نفس الوفر في التكلفة وأن إحداها تؤدي إلى تحلل المشكلة ولكنها في نفس الوقت تسمح بنقل عدد أكبر من الوحدات عن الخلايا الأخرى التي يؤدي استخدامها إلى عدم تحلل المشكلة، فمن الأفضل اختيار الأولى رغم ما ينتج عن ذلك من تحلل في المشكلة يسهل علاجه (وبشرط وضع n قيمة قريبة من الصفر) في أقل الخلايا غير المستغلة بالكميات وبحيث تكون هذه الخلية لم يسبق استغلالها أبداً في الجداول السابقة، حيث إن ذلك سيؤدي في معظم الأحيان إلى التوصل إلى الحل الأمثل في عدد أقل من الخطوات.

من الملاحظ أيضاً أن مشكلة التحلل قد تنتج عنها الحاجة إلى شغل أكثر من خلية واحدة بكميات ضئيلة (n قيمة قريبة من الصفر) حتى يمكن التغلب على المشكلة. والواقع أنه ليس هناك أي ضرر أو أي تعقيد يمكن أن ينتج عن إضافة أي عدد من الخلايا (n) بما يكفي لإعادة شرط عدم التحلل إلى وضع الاستيفاء. ولكنه في هذه الحالة يجب اختيار الخلايا المضافة بدقة حتى لا تسير المشكلة في حلقة مفرغة، بمعنى أن كل خطوة تالية تؤدي إلى إعادة الأمر إلى ما كان عليه في خطوات سابقة. فإذا حدث ذلك فيجب نقل (n) إلى خلية أخرى من الخلايا غير المستغلة حتى نتفادى الدوران في حلقة مفرغة (وتسمى المشكلة من هذا النوع Problem Cycling)

ثانياً ـ مشكلة البحث عن أعلى ربح ممكن (القيمة العظمى):

كان الهدف في السابق هو البحث عن التوزيع الذي يمثل أقل تكلفة ممكنة، ولكن

الهدف في بعض الأحيان يكون هو البحث عن أعلى ربح ممكن. في هذه الحالة نتبع كل الإجراءات التي اتبعناها في القيمة الصغرى على حل القيمة العظمى، ما عدا الاختلاف يكون في الأمور التالية:

1 ـ الاختلاف يكون في كيفية الاختيار للقيمة من الخلايا التي لم تستغل: في حالة القيمة الصغرى كانت القيمة التي يجب اختيارها تمثل أعلى قيمة بالسالب. ولكن في القيمة العظمى يجب اختيار القيمة التي تمثل أعلى قيمة بالموجب، والتي تعني أن هذه القيمة سوف ترفع الأرباح بوحدة واحدة حسب هذه القيمة في موقع الخلية.

2 ـ الاختلاف في كيفية تحديد الجدول النهائي الذي يمثل الحل الأمثل: في حالة القيمة الصغرى يحدد الجدول النهائي بأنه هو الحل الأمثل عن طريق ملاحظة القيم الموجودة في الخلايا غير المستغلة؛ فيجب أن تكون هذه القيم كلها موجبة أو تساوي صفراً ($Cij - Ui - Vj \geqslant 0$). بينما يكون جدول الحل الأمثل للقيمة العظمى عندما تكون هذه القيم سالبة أو تساوي الصفر ($Cij - Ui - Vj \leqslant 0$) ويمكن توضيح ذلك عن طريق المثال (6):

جدول (43 ـ 4)

منافذ التوزيع	I	II	III	المخازن المركزية
	الربح المباشر للوحدة			
A	6 / 200	4 / 0	7 / 150	350
B	4 / 3	6 / 7	2 / 400	400
C	3 / 350	5 / 4	3 / − 1	350
D	5 / 200	3 / 450	5 / − 1	650
	750	450	550	

مجموع الأرباح (6) 200 + (7) 150 + (2) 400 + (3) 350 + (5) 200 + (3) 450

$= 1200 + 1050 + 800 + 1050 + 1000 + 1350 = 6450$

عند ملاحظة الخلايا غير المستغلة أو غير المملوءة بالكميات، نجد الخلية (IIB) تمثل أعلى قيمة بالموجب (7). وهذا يعني أن الأرباح سوف تزيد بقيمة (7) دنانير للوحدة

الواحدة، لأية كمية تكون بداخل هذه الخلية. ويمكن الآن تعديل توزيع الوحدات داخل هذا الجدول وذلك حسبما اتبع في إجراءات القيمة الصغرى، وهي كما في الجدول (44 ـ 4).

جدول (44 ـ 4)

الربح المباشر للوحدة

منافذ التوزيع	I	II	III	المخازن المركزية
A	6 -7	4 -7	7 350	350
B	4 -4	6 200	2 200	400
C	3 350	5 4	6	350
D	5 400	3 250	5 6	650
	750	450	550	

مجموع الأرباح (7) 350 + (6) 200 + (2) 200 + (3) 350 + (5) 400 + (3) 250 =

= 2450 + 1800 + 400 + 1050 + 2000 + 750 = 8450

نلاحظ في الجدول (44 ـ 4) وجود خليتين (C III) (D III) تمثلان أعلى قيمة بالموجب. فيتم اختيار الخلية التي من المحتمل أن ينقل إليها أكبر كمية ممكنة من الوحدات. ولكن نجد أن الخليتين متساويتان في الكمية التي تنقل إليهما وهي (200). ولكن الخليتين تختلفان في ربح الوحدة الواحدة، فنجد أن الخلية (C III) يكون ربح الوحدة يساوي (3) بينما الخلية (D III) يكون فيها ربح الوحدة أعلى من الخلية السابقة وهي (5) إذاً يمكن اختيار الخلية (D III)، لأنها سوف تضيف لنا أرباحاً أعلى طالما أن الكميتين اللتين تنقلان إلى هاتين الخليتين متساويتان، ويكون التوزيع الجديد للكميات كما في الجدول (45 ـ 4).

جدول (45 ـ 4)

الربح المباشر للوحدة

منافذ التوزيع	I	II	III	المخازن المركزية
A	6 -1	4 -5	7 350	350
B	4 0	6 400	2 -2	400
C	3 300	5 50	3 0	350
D	5 450	3 0	5 200	650
	750	450	550	

مجموع الأرباح (7) 350 + (6) 400 + (3) 300 + (5) 50 + (5) 450 + (5) 200 =

= 2450 + 2400 + 900 + 250 + 2250 + 1000 = 9250

نلاحظ في الجدول (45 ـ 4) أن كل القيم الموجودة في الخلايا غير المستغلة أقل من الصفر وتساوي الصفر. إذاً هذا هو الحل الأمثل بالنسبة للقيمة العظمى.

أسئلة وتمارين Questions and Exercises:

الأسئلة Questions:

س1 ـ ما هو المقصود بمشكلة النقل؟ وما هي الخطوات الأساسية التي يجب أن نأخذها عندما نقوم بحل مشكلة تتعلق بالنقل؟

س2 ـ ما هي الطرق التي يمكن استخدامها لإيجاد التوزيع الأمثل؟ وما هي الطرق الأخرى للتأكد من أن الحل هو الحل الأمثل أم لا؟ مع إعطاء أمثلة عن ذلك.

س3 ـ وضّح كل ما أمكن ذلك وباستخدام الأمثلة البسيطة كلاً من:

أ ـ نموذج النقل غير المتوازن.

ب ـ مشكلة التحلل.

س4 ـ ما هو الفرق بين مشكلة البحث عن أقل تكلفة ومشكلة البحث عن أعلى ربح ممكن؟

التمارين Exercises :

س1 ـ تحتاج الجماهيرية الليبية لأربعة أنواع من الحبوب هي (الذرة، القمح، الدخن، الشعير) لأجل استزراعها في الموسم الزراعي القادم. توجد ثلاث دول مستعدة لسد هذه الحاجة وهي: روسيا، كندا، إسبانيا. وذلك بالكميات التالية: (50، 60، 25) ألف طن للدول الثلاث على التوالي. أما كميات الطلب عن هذه الأنواع الثلاثة من الحبوب في الجماهيرية بآلاف الأطنان وسعر الطن الواحد من الحبوب بالدولار حسبما هو معروض من تلك الدول مبينة بالجدول التالي:

أنواع الحبوب	حجم الطلب ألف/طن	سعر الطن الواحد من الحبوب بالدولار		
		روسيا	كندا	أسبانيا
الذرة	60	3	7	2
القمح	40	2	5	5
الدخن	20	7	3	4
الشعير	15	6	3	5

المطلوب: ضع هذه المشكلة في صورة مشكلة نقل. ثم أوجد الخطة المثالية لتوريد الأصناف الثلاثة من الحبوب والتي تجعل مجموع تكاليف الشراء أقل ما يمكن.

س2 ـ شركة النجاح يوجد لديها ثلاثة مصانع (أ، ب، جـ) تنتج سلعة معينة ولتكن الدراجات. وأن الطاقة الإنتاجية لهذه المصانع الثلاثة وعلى التوالي هي (100، 200، 400) وهذا الإنتاج يتم نقله إلى ثلاثة مخازن (س، ص، ع) وطاقتها التخزينية على التوالي هي (250، 150، 200). ويتم نقل هذه الدراجات من المصنع (أ) إلى المخازن (س، ص، ع) عند تكلفة (1، 3، 1) دينار للدراجة الواحدة على التوالي. كما يتم نقل الدراجات من المصنع (ب) إلى المخازن الثلاثة عند تكلفة قدرها (1، 3، 2) دينار للدراجة الواحدة على التوالي. كذلك يتم نقل الدراجات من المصنع (جـ) إلى المخازن الثلاثة عند تكلفة قدرها (3، 1، 2) دينار للدراجة الواحدة على التوالي.

المطلوب: وضع هذه المشكلة في صورة مشكلة نقل، ثم أوجد الحل الذي يوضح كيفية نقل هذه الدراجات من المصانع الثلاثة إلى المخازن الثلاثة وذلك عند أدنى تكلفة. هل الحل الأمثل الذي توصلت إليه هو حل وحيد أم أن هناك أكثر من حل أمثل؟ وإذا كان الأمر كذلك أوجد أحد تلك الحلول البديلة مع حساب التكاليف في كل حالة من تلك الحالات.

س3 ـ تحتاج جامعة الجبل الغربي لأربعة كتب (B1, B2, B3, B4) في تخصصات أربعة مختلفة وذلك خلال الفصل الدراسي القادم وبالأعداد التالية: (B1 = 19, B2 = 15, B3 = 12, B4 = 18). وقد تقدمت ثلاثة من دور النشر (I, II, III) لتزويد الجامعة

بهذه الكتب ولكن تحت الشروط التالية والأسعار التالية:

	B1	B2	B3	B4	
I	40	40	45	35	18
II	20	25	30	25	26
III	50	40	30	35	20
	19	15	12	18	

المطلوب: إيجاد الخطة الشرائية التي من شأنها جعل تكاليف الشراء للجامعة أقل ما يمكن ـ هل الحل الأمثل الذي توصلت إليه هو حل وحيد أم أن هناك أكثر من حل أمثل؟ وإذا كان كذلك فأوجد أحد تلك الحلول مع حساب التكاليف في كل الحالات.

س4 ـ شركة تمتلك ثلاثة مصانع (X1, X2, X3) لإنتاج الثلاجات تقع في مناطق جغرافية مختلفة. وتقوم الشركة بشحن الإنتاج من المصانع الثلاثة إلى ثلاثة مخازن (A, B, C) وذلك بغرض التخزين (أي المخازن) تقع في مناطق مختلفة وتبلغ تكلفة النقل من المصنع الأول إلى المخازن الثلاثة (8، 8، 4) على التوالي وتكلفة نقل الثلاجة من المصنع الثاني إلى المخازن (24، 16، 8) على التوالي، ومن المصنع الثالث إلى المخازن (5، 16، 24) على التوالي. وتقدر الطاقة الإنتاجية للمصانع (77، 82، 56) بينما القدرة التخزينية للمخازن الثلاثة هي على التوالي (41، 102، 72) ثلاجة في الشهر.

المطلوب: تحديد الخطة التي يجب اتباعها في نقل الثلاجات من المصانع إلى المخازن الثلاثة لجعل التكاليف للنقل أقل ما يمكن.

س5 ـ تقوم ثلاثة معامل بإنتاج الحبيبات البلاستيكية، ويتم نقل هذه المواد إلى أربعة معامل حيث يتم تشكيلها في منتجات مختلفة. أوجد أفضل طريقة لنقل وتوزيع الحبيبات البلاستيكية بحيث تكون تكلفة ذلك أقل ما يمكن استناداً إلى المعلومات التالية:

1 ـ تكلفة النقل:

	1	2	3	4
A	3	5	4	4
B	4	4	5	5
C	4	3	4	3

2 ـ الطاقة الإنتاجية للمعامل الثلاثة (A, B, C) هي (190، 150، 160) وتحتاج معامل التشكيل التالية من الحبيبات سنوياً إلى:

المعامل	1	2	3	4
الحبيبات ألف طن	70	100	150	180

س6 ـ إذا توفرت لديك المعلومات الموجودة في الجداول التالية :

الجدول الأول

تكلفة النقل للوحدة

المصانع	الأول	الثاني	الثالث	احتياجات المراكز
الأول	2	4	7	500
الثاني	5	2	8	300
الثالث	3	6	4	700
طاقة المصانع	400	300	800	

الجدول الثاني

الربح المباشر للوحدة

المخازن المركزية	الأول	الثاني	الثالث	احتياجات المنافذ
الأول	6	4	7	350
الثاني	4	6	2	400
الثالث	3	5	3	350
الرابع	5	3	5	650
طاقة المخازن	750	450	600	

الجدول الثالث

تكلفة النقل للوحدة

مناقذ التوزيع	الأول	الثاني	الثالث	طاقة المصانع
الأول	2	5	6	600
الثاني	3	4	5	400
الثالث	5	3	7	350
ألرابع	4	2	1	450
احتياجات المنافذ	400	300	800	

المطلوب: 1 ـ قم بإجراء التوزيع المبدئي حسب قاعدة الزاوية الشمالية الغربية، وحدد تكلفة النقل أو أرباح التوزيع المثالية مرة باستخدام طريقة الحجر المتنقل ومرة أخرى باستخدام طريقة التوزيع المعدلة.

3 ـ قم بصياغة نموذج البرمجة الخطية الملائم لكل مشكلة منها.

س7 ـ إذا علمت أن الطلب في المراكز التسويقية التالية والموضحة في مصفوفة النقل أدناه أكثر من عرض المخازن؛ أوجد أفضل برنامج للنقل وفق طريقة الركن الشمالي أولاً ثم طريقة الأقل تكلفة ثانياً ومن ثم وفق طريقة فوجل.

مناطق التوزيع

مناطق التجهيز	D1	D2	D3	العرض
S1	6	8	11	20
S2	12	6	8	40
S3	9	5	4	25
S4	3	0	1	15
الطلب	70	60	50	

س8 ـ حل مشكلة النقل الآتية بطريقة فوجل ثم اختبر الحل الأمثل وفقاً لطريقة حجر التنقل (التخطي).

مناطق التوزيع

مناطق التجهيز	D1	D2	D3	Ai
S1	14	13	11	1200
S2	13	12	13	1000
bj	1000	700	500	

الفصل الخامس

تحليل الشبكات

Network Analysis

كثير من المشاكل والمشاريع التي تتسم بالتعقيد يمكن أن نعبر عنها على شكل شبكة الأعمال Network، وترجع أهمية دراسة تحليل الشبكات إلى وجود العديد من المشاكل العملية الهامة يمكن تركيبها أو التعبير عنها في صورة شبكات الأعمال، حيث إن حل تلك المشاكل يكون سهلاً وميسراً إذا كان هناك إلمام بالقواعد التي نتعامل بها مع تحليل الشبكات. ويوجد الكثير من المشاكل التي تتعلق بالبرمجة الخطية يمكن التعبير عنها في صورة تحليل الشبكات ويكون حلها أيسر مقارنة بنماذج البرمجة الخطية.

تعريف تحليل الشبكات:

- تحليل الشبكات هو عبارة عن أسلوب فني لتخطيط وجدولة ومراجعة المشروعات عن طريق تخفيض إدارة المشروعات الكبيرة إلى خطوات محددة.
- تحليل الشبكات هو مجموعة من النقط (Vertices, Nodes) وخطوط (Arcs) تصل تلك النقط بعضها البعض حيث إن كل نقطة ترتبط بنقطة أو أكثر من خلال مجموعة من الخطوط.

النماذج الرئيسية لتحليل الشبكات:

يمكن تقسيم تحليل الشبكات إلى الأقسام التالية:

1 ـ نماذج أقصر الطرق Shortest-Path Model:

تستخدم هذه النماذج عند الرغبة في تحديد أقصر طريق بين نقطتين أو أقصر طريق بين نقطة معينة وجميع النقاط الأخرى في شبكة الأعمال أو أقصر طريق بين كل نقطتين في شبكة الأعمال.

2 ـ نماذج أقصى تدفق Maximum-Flow Models:

نستخدم هذه النماذج لتحديد أقصى تدفق من الأرباح يمكن أن تحققه شبكة الأعمال.

3 ـ نماذج شبكة أعمال الأنشطة Activity Network Models:

وهذه النماذج تهدف إلى تحديد الأنشطة المتتابعة والمتوازية، وتحديد الوقت لكل نشاط والتعرف على المسار (المسارات) الحرج.

مزايا تطبيق تحليل الشبكات:

1 ـ تلزم إدارة المشروع بوضع خطة شاملة قبل الشروع في العمل.

2 ـ تحليل الشبكات يساعد إدارة المشروع في عمليات التنسيق والمراجعة والمتابعة بين أجزاء المشروع.

3 ـ تسلط الضوء على الأنشطة الحساسة والهامة مقدماً، كما تحدد عدد المسؤوليات تجاه هذه الأنشطة الحرجة.

4 ـ تساعد المديرين والمسؤولين في تحسين طريقة تفكيرهم، وتجعلهم أكثر إحساساً بالمشاكل التخطيطية وأهميتها في المشروع.

5 ـ تجعل إدارة المشروع تركز وتضع الإهتمام على الأنشطة ذات العطل أو التأخير أو ذات التكلفة المرتفعة أو النقص في الإمكانيات أكثر من جعل الإدارة تركز على الأنشطة العادية التي تتقدم بسرعة وبشكل عادي.

6 ـ تسهل توفير المعلومات التخطيطية حتى مع تغيير الإدارة العليا في المشروع، كما توفر المعلومات اللازمة لإعطاء الأوامر ووضع الإجراءات ونظم العمل.

7 ـ تحدد وتشير للبداية المثالية للمشروع والنهاية المثالية له ولكل نشاط أو وظيفة يتكون منها المشروع (أفضل وقت للبدء وللانتهاء وللتشغيل).

8 ـ تساعد على تحسين وتعديل الخطة بما يوافق أي ظرف أو ظروف جديدة.

9 ـ تقترح الطرق البديلة لإنجاز الوظائف والأنشطة في المشروع.

10 ـ تسمح بإعداد تقارير عن تقدم العمل وإرسال التعليمات بدون ضياع كامل لتأمين سير العمل.

11 ـ تسمح بالتخطيط المسبق للخطة العامة للمشروع لتلك الأنشطة والوظائف ذات الطابع الواحد والواجب تخطيطها كوحدة متكاملة أو جزء من المشروع Sub-project، مما يساعد في الإسراع في عملية التخطيط الشامل.

12 ـ تعتبر من أهم الطرق لتدريب العاملين على أساليب إدارة العمليات.

13 ـ يحقق تطبيق تحليل الشبكات كأسلوب لتخطيط وجدولة المشروعات، توفير معلومات هامة وعديدة وبأقل مساحة تخزينية لازمة، وخاصة إذا ما استخدم الحاسب الآلي (الحاسوب) في تحليل الشبكات.

وأخيراً يمكن أن نقول باختصار بأن أسلوب تحليل الشبكات يعتبر ثورة جديدة في التخطيط عن طريق تحسين الوقت ومراقبة التكاليف بالمقارنة بالأساليب التخطيطية والتقليدية الأخرى.

بناء شبكة المشروع:

تعتبر الخطوة الأولى في تطبيق تحليل الشبكات (المسار الحرج وبيرت) هي التعرف على المشروع الذي يجب أن يخطط له، وذلك عن طريق تحديد الوظائف والأنشطة التي يتكون منها، ورسم هذه الأنشطة بيانياً في شبكة تدفق Flow Chart. ويطلق على هذه المرحلة الوجه التخطيطي للمشروع، أي إعداد «مسودة» للخطة. ولكن قبل الشروع في بناء هذه الخطة توجد هناك قواعد وشروط أساسية يجب أن نأخذها بعين الاعتبار.

القواعد والشروط الأساسية لبناء شبكة المشروع:

1 ـ تبدأ الشبكة البيانية بالحادثة البدائية والتي لا يصلها أي سهم، وتنتهي بالحادثة النهائية والتي لا يخرج منها أي سهم.

2 ـ كل حادثة (دائرة) مرحلية يجب أن يصلها سهم (نشاط) واحد على الأقل ويخرج منها سهم واحد على الأقل، ويجوز أن يكون أكثر من ذلك.

3 ـ كل نشاط (سهم) يجب أن تسبقه وتتبعه حادثة (دائرة) ما عدا الحادثة البدائية والنهائية.

4 ـ يجب أن لا يكون في الشبكة أقسام معزولة ليس لها علاقة بالعمل في المشروع.

5 ـ لا يجوز أن تعود الأنشطة في الشبكة إلى نفس النقطة التي بدأت منها.

بعض المصطلحات الأساسية لبناء الشبكة البيانية:

ـ **النشاط** (⟵): النشاط Activity هو العمل اللازم لإتمام حدث معين. ولكل نشاط نقطة بداية ونقطة نهاية. ويستغرق النشاط وقتاً زمنياً معيناً بين بدايته ونهايته. وتصور الأنشطة في شكل أسهم يكتب عليها الوقت المقدر للانتهاء والموارد اللازمة ($\xrightarrow{\text{الزمن}}$).

ـ **النشاط الوهمي أو التخيلي أو الافتراضي** Dummy Activity: وهي الأنشطة التي تضاف إلى الشبكة وذلك لغرض استكمالها، ولكن ليس لها تأثير على الشبكة أو التكاليف أو الموارد. وهذه الأنشطة لها علاقة التبعية بين نشاط ونشاط آخر، وقد يطلق عليها «بالأسهم التبعية» ويوضع عليها وقت يساوي صفراً (الزمن = صفر) وهي من نوعين:

1 ـ الأنشطة التخيلية المنطقية Logic Dummy: وهي توضح اعتماد نشاط على آخر

عندما يكونان في ممرات مختلفة Path.

2 ـ الأنشطة التخيلية المتشابهة: تستخدم للتفرقة بين نشاطين أو أكثر قد يكون لهما نفس رقم الحدث.

ـ **أحداث** Events (O) ـ يطلق على بداية أو نهاية أي نشاط بالأحداث؛ فالحدث عبارة عن نقطة زمنية، أو بنفس المعنى الحدث هو إنجاز معين يتم عند نقطة معروفة من الزمن.

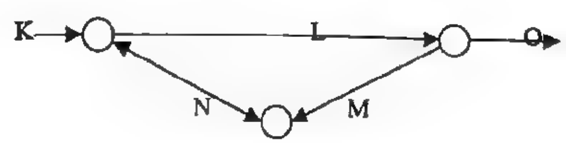
ـ **الشبكة**: وهي عبارة عن تصوير لخطة مشروع معين، وهي توضح العلاقات المتداخلة بين أنشطة المشروع وقد يطلق على الشبكات (الرسوم السهمية) أي بالأسهم، وعندما يتم حساب الوقت يطلق عليها الشبكة ويمكن أن تستخدم كجدول زمني للمشروع. يمكن القول بأن الشبكة أو الرسم الشبكي يتكون من مجموعة من النقاط يطلق عليها حدث أو أحداث تتصل ببعضها البعض بالأسهم أو الخطوط. ولذا فإن التحليل الشبكي يعتمد على تقسيم المشروع إلى مجموعة من المراحل ندعوها بالأحداث، حيث يتم تمثيلها بيانياً بشكل دوائر أو حلقات من خلال خرائط انسيابية ذات اتجاه تدفقي معين، تتصل في ما بينهما بأسهم أو خطوط وتظهر الفترة الزمنية اللازمة للانتقال من حدث إلى آخر، ندعو هذه الأسهم التي تتصل بين الأحداث المختلفة بالنشاطات وتقوم النشاطات المختلفة بترتيب الأحداث حسب تتابع زمني أو منطقي معين للعمل، حيث تشير إلى مكان وقوع الحادثة والفترة الزمنية اللازمة لإنتاج هذه الحادثة وعلاقتها بالأحداث الأخرى.

وتسمى مجموعة الأحداث أو الحلقات والأسهم مجتمعة مع بعضها البعض في شكل بياني «بالشبكة البيانية»، وتستخدم هذه الشبكات عادة في تحديد أقل زمن ممكن للانتهاء من المشروع أو أقل تكلفة ممكنة لتحقيق عمليات الإنتاج الممكنة، ووضع البدائل الممكنة لتقليص الفترات الزمنية أو التكلفة من ضمن الشروط والموارد المتاحة للمشكلة المطروحة.

بعض الأخطاء في بناء الشبكة البيانية:

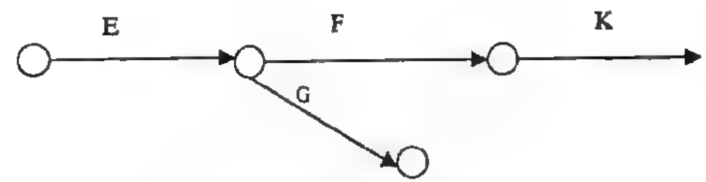
1 ـ خطأ الدائرية Looping: عندما تقوم برسم النشاط وهذا النشاط يتوقف على نشاط آخر ظاهرياً من الرسم وغير ممكن عملياً. ففي الرسم التالي تجد أن النشاط (L) يتوقف على النشاط (N) الذي يتوقف بدوره على النشاط (M). ولهذا يجب تجنب الدائرية في الشبكات.

شكل (1 ـ 5)



2 ـ مشكلة الأنشطة المعلقة: وهي التي لا تعتمد على نشاط آخر غير نقطة النهاية ويطلق عليها «خطأ ديبل» Dangling، كما هو موضح في الشكل (2 ـ 5) وهذا يكسر قاعدة الاعتمادية التي تتحكم في الشبكات.

شكل (2 ـ 5)



طرق تحليل الشبكات:

يعتبر كل من أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (PERT)[1] وأسلوب المسار لحرج (CPM)[2] إعداداً طبيعياً لأساليب التحليل الشبكي التي جرى استخدامها في العلوم الطبيعية والهندسية منذ قرون. غير أن الميلاد الحقيقي لهذين الأسلوبين كأدوات إدارية فعالة في تخطيط وجدولة تنفيذ المشروعات ومتابعة عمليات التنفيذ والرقابة عليها، قد تم أواخر الخمسينات من القرن العشرين. وقد انتشر استخدام هذا الأسلوب أيضاً منذ ذلك التاريخ في كل من المجالات الاستراتيجية ومجالات تخطيط وجدولة تنفيذ المشروعات باختلاف أنواعها.

فنجد أن الأسلوبين «بيرت» و«المسار الحرج» يتشابهان من حيث الأسس والأطر والإجراءات. فكل منهما يؤدي إلى توفير أفضل الخطط لتنفيذ المشروعات طبقاً لتتابعها الزمني والتقني، كما يوفر البيانات اللازمة للمتابعة بكفاءة، عن طريق التركيز على المهام

(1) Program Evaluation and Review Technique.
(2) Critical Path Method.

أو العمليات التي تمثل مراكز الاختناق. غير أنهما يختلفان من حيث أسس وإجراءات حساب الزمن اللازم لتنفيذ كل مهمة أو عملية من عمليات المشروع. ويعتبر الأسلوبان من أهم الأساليب لإدارة تنفيذ المشروعات حيث يمكنان من أداء الوظائف وإنجاز المهام المتعلقة بالتخطيط والجدولة والمتابعة بكفاءة عالية.

لقد أصبحت مجالات تطبيق كل من أسلوبي المسار الحرج وتخطيط ومراجعة البرامج من التعدد والتنافر بحيث يمكن القول إنهما يصلحان للتطبيق في مجال من المجالات ما دامت الشروط والخصائص اللازمة لتطبيقهما متوافرة. فيمكن تطبيقهما في مجالات تتراوح بين تخطيط وابتكار وتوزيع وانتشار منتج وبين تخطيط وجدولة وتنفيذ مشروع استراتيجي حيوي وهام وكبير. فهما يستخدمان في المشروعات الإنشائية للمباني والمصانع والطرق والكباري، وفي تخطيط وجدولة إنتاج الآلات والمعدات والسفن والطائرات، وفي تخطيط وتنفيذ خطط انتشار الأسلحة الاستراتيجية وغيرها. وهما في كل الأحوال يحققان الأهداف التالية:

1 ـ جدولة تنفيذ العمليات المختلفة والمهام المتعددة للمشروع كله بحيث يتم في أقل وقت ممكن وبأقل التكاليف الممكنة.

2 ـ تحديد المهام والأنشطة التي تستلزم عناية خاصة أثناء التنفيذ حتى يمكن تلافي الاختناق والتأخير في عمليات التنفيذ، ويؤدي ذلك إلى تحقيق وفورات لا يستهان بها في تكاليف التنفيذ وفي العائد المفقود نتيجة التأخير في التنفيذ.

وسوف نبين استخدام كل من الأسلوبين بقليل من التفصيل في هذا الفصل بهدف توضيح المفاهيم وخطوات التطبيق العملي.

بناء نموذج التحليل الشبكي:

يلزم لتطبيق أسلوب المسار الحرج أو أسلوب تخطيط وجدولة المشروعات، أن يتم تحليل المشروع أو تجزئته إلى مهام محددة وواضحة. فيلزم أن يتم تحديد وتعريف كل جزئية من المشروع والمهام اللازمة لتنفيذها بوضوح ودقة حتى تتوافر إمكانية التمييز بين الأنشطة أو المهام المؤدية إلى إنجاز كل جزئية من الجزئيات، والأحداث المترتبة على هذا الإنجاز والمرتبة لها. وفي إطار نماذج التحليل الشبكي يكون للنشاط أو المهمة دلالة محددة كما يكون للحدث مغزى معين.

فالنشاط أو المهمة هي أداء وظيفي يستنفذ موارد اقتصادية ويتم تعريفه بدلالة الزمن اللازم لإنجازه، وعندما يتحقق إنجازه باستنفاذ الزمن المقرر له يتحقق حدث معين. والحدث المعين يكون بالتبعية هو اللحظة الزمنية المؤذنة بانتهاء النشاط أو المهمة (أو بابتداء النشاط أو المهمة)، أو بإنجاز جزئية معينة من المشروع (أو البدء في جزئية معينة

من المشروع). فعند التفكير في بناء المنزل، يوجد هناك العديد من الأنشطة أو المهام أو الأعمال يلزم إجراؤها؛ مثلاً حفر القواعد، بناء الجدران، وضع السقف، تركيب النوافذ والأبواب، الخ. فمثلاً حفر القواعد يعد نشاطاً أو مهمة تستغرق وقتاً وتستنفذ طاقة وجهداً. وعند البدء في الحفر يتحقق حدث، وعند الانتهاء من عملية الحفر يتحقق حدث وهكذا.

وبعد أن يتم تحليل المشروع إلى الأنشطة والمهام اللازمة لتنفيذه وتحديد أحداث البدء والإنجاز الخاصة بكل نشاط أو مهمة، يتم وضع نتائج هذا التحليل في جدول «التتابع الفني لإنجاز عمليات المشروع» ككل. وحيث أن الأنشطة والمهام هي التي تستغرق وقتاً بينما الأحداث لا تستغرق أي وقت، فإن التتابع الفني للعمليات يحدد الأزمنة اللازمة لإنجاز كل نشاط أو مهمة عن طريق علاقات أحداث البدء والانتهاء.

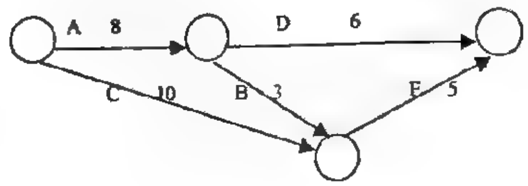
وبعد أن يتم إعداد جدول (أو جداول) التتابع الفني لعمليات تنفيذ المشروع (أو لجزئياته إذا كان المشروع كبيراً)، يتم إعداد خريطة شبكية توضح هذا التتابع والأنشطة والأحداث المميزة له والأزمنة اللازمة لإنجاز كل نشاط من الأنشطة. وقد جرت العادة على تمثيل النشاط أو المهمة على الخريطة بسهم تقع قاعدته عند حدث بدء النشاط وتقع قمته عند حدث انتهاء النشاط، كما جرت العادة على تمثيل الأحداث بدوائر تربط الأنشطة أو المهام ببعضها البعض. **والمثال رقم (1)** يبين ذلك:

جدول (1 ـ 5) التتابع الفني للعمليات

النشاط	توصيف النشاط	أسبقية الأنشطة	الزمن اللازم بالساعة
A	حفر القواعد	–	8
B	بناء الجدران	A	3
C	إحضار الأدوات والمعدات	–	10
D	تنظيف الأرضية	A	6
E	وضع السقف	BC	5

ولأنه يمكن بناء خريطة التتابع الفني للعمليات والتي تحتوي على المسميات الرمزية للأنشطة المختلفة، وكذلك الأزمنة اللازمة لإنجاز كل منها. وقد جرت العادة على وضع التسمية الرمزية للنشاط أعلى السهم الخاص به ووضع الزمن اللازم لإنجاز النشاط أسفل السهم. وإذا قمنا بإجراء ذلك من واقع جدول التتابع الفني لظهرت خريطة التتابع الفني بأزمنة الإنجاز كما هو موضح بالشكل (3 ـ 5).

(5 ـ 3)



أمثلة عن كيفية بناء الشبكة البيانية:

مثال (2) ـ رسم الشبكة البيانية عن طريق استخدام الأحداث:

مشروع لإنشاء مصنع يتضمن الأحداث والأنشطة المبينة في الجدول (2 ـ 5)

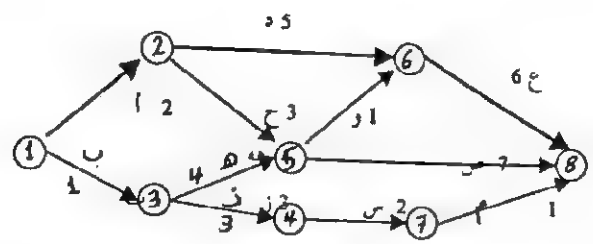
جدول (2 ـ 5)

الأحداث	الأنشطة	الزمن/ أسبوع
2 ـ 1	أ	2
3 ـ 1	ب	1
5 ـ 2	جـ	3
6 ـ 2	د	5
5 ـ 3	هـ	4
6 ـ 5	و	1
4 ـ 3	ز	3
7 ـ 4	س	2
8 ـ 5	ص	7
8 ـ 6	ع	6
8 ـ 7	م	1

المطلوب: رسم شبكة المشروع حسب تعاقب الأنشطة.

الحل:

شكل (4 ـ 5)



مثال (3) ـ رسم الشبكة البيانية عن طريق استخدام المسارات:

ظهرت البيانات التالية لدى شركة النجاح كما في الجدول (3 ـ 5).

جدول (3 ـ 5)

الأنشطة	A	B	C	D	E	F	G
الزمن/ يوم	5	4	3	1	7	2	1

علماً بأن المسارات لهذه الأنشطة هي كالآتي وهي على التوالي:

المسار الأول G ⟵ F ⟵ C ⟵ A

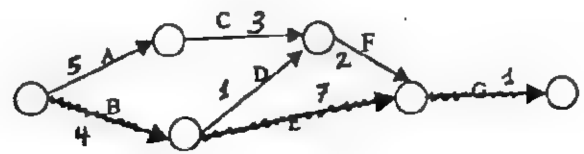
المسار الثاني G ⟵ F ⟵ D ⟵ B

المسار الثالث G ⟵ E ⟵ H

المطلوب: بناء الشبكة البيانية لهذه الشركة وتحديد المسار الحرج على الشبكة.

الحل:

شكل (5 ـ 5)



مثال (4) ـ رسم الشبكة البيانية عن طريق استخدام كلمة (تلي):

مشروع معين له سبعة أنشطة وذلك حسب الترتيب التالي (C تلي A) & (B تلي A) & (E,D تلي B) & (F تلي C,D) & (G تلي E,F). ولقد كانت المعلومات المتوفرة والمتعلقة بالفترة الزمنية لتنفيذ كل نشاط هي كما في الجدول (4 ـ 5).

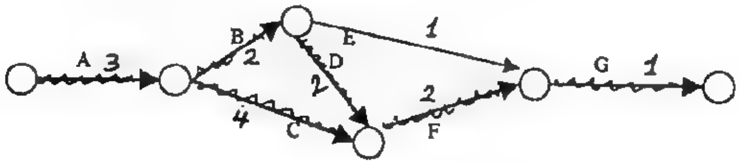
جدول (4 ـ 5)

الأنشطة	A	B	C	D	E	F	G
الزمن/ أسبوع	3	2	4	2	1	2	1

المطلوب: بناء شبكة المشروع وتحديد المسارات والمسار في الشبكة.

الحل:

شكل (6 ـ 5)



مثال (5) ـ رسم الشبكة البيانية عن طريق استخدام العبارات اللغوية:

ترغب شركة أمان للإطارات تقديم منتج جديد، وهو عبارة عن إطار لجرار ثقيل (Dg). ولقد كانت المعلومات المتوفرة لدى الشركة من الأنشطة اللازمة لتنفيذ هذا المشروع مقرونة بالوقت اللازم لتنفيذها بالأشهر، وكذلك ترتيب هذه الأنشطة مبينة في الجدول (5 ـ 5).

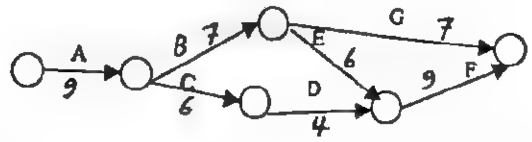
جدول (5 ـ 5)

الأنشطة	الوصف	الأنشطة السابقة له	الزمن/ شهر
A	توسيع مبنى المصنع الحال	–	9
B	الاتصال بمنتجي الآلات واستقبال العروض	A	7
C	إستيراد الآلات	A	6
D	تركيب الآلات	C	4
E	تدريب المنتجين على الآلات الجديدة	B	6
F	التقيم المبدئي للآلات الجديدة	D, E	9
G	التقيم النهائي للآلات الجديدة	B	7

المطلوب: إرسم شبكة المشروع.

الحل:

شكل (7 ـ 5)



مثال (6) رسم الشبكة البيانية عن طريق استخدام وجود أنشطة تخيلية داخل الشبكة:

مشروع معين له ستة أنشطة، المعلومات المتوفرة لدى المشروع مبينة في الجدول (5 ـ 6)

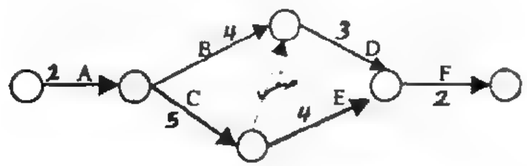
جدول (6 ـ 5)

الأنشطة	A	B	C	D	E	F
الأنشطة السابقة لها	ـ	A	A	BC	C	DE
الزمن/ أسبوع	2	4	5	3	4	2

المطلوب: بناء الشبكة البيانية للمشروع.

الحل:

شكل (8 ـ 5)



I ـ طريقة المسار الحرج The Critical Path Method (CPU):

الهدف الأول لتحليل الشبكات هو تحديد المسار الحرج Determining the Critical Path، ويعرف المسار الحرج بأنه هو ذلك المسار على الخريطة والذي يشكل أطول الطرق بين الحادثة الابتدائية والحادثة النهائية، بحيث يمر بعدد من الحوادث المتتالية

والتي تتصل في ما بينها بعدد من الأسهم الأنشطة. ويمثل المسار الحرج وقت الإنجاز المبكر للمشروع ككل، والذي لا يمكن التبكير في إتمام الإنجاز أو التنفيذ عنه دون تحمل تكاليف إضافية.

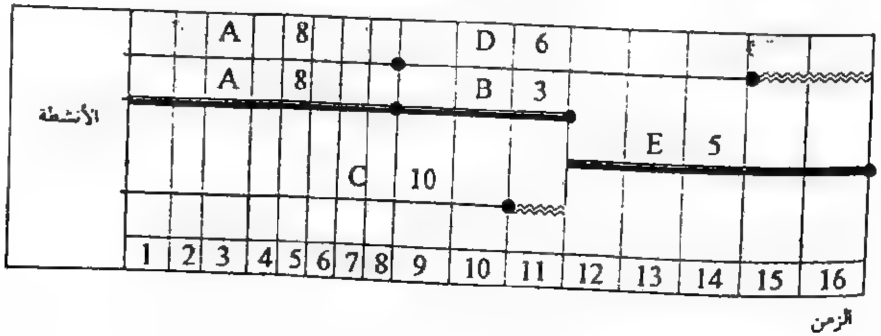
ويمكن تحديد المسار الحرج عن طريق حصر جميع المسارات على خريطة التتابع الفني وتحديد الأزمنة اللازمة لإنجاز كل منها وتحديد أكثرها استنفاذاً للوقت ليكون المسار الحرج. **وفي المثال الأول (1)** يمكن تحديد المسارات المختلفة في خريطة التتابع الفني للعمليات كما هو مبين في الجدول (7 ـ 5).

جدول (7 ـ 5)

المسار	الزمن بالأسبوع	مجموع الأسابيع
$A \longrightarrow D$	$= 6 + 8$	14
$A \longrightarrow B \longrightarrow E$	$= 5 + 3 + 8$	16
$C \longrightarrow E$	$= 5 + 10$	15

وعلى هذا فإن المسار الثاني (A, B, E) يمثل المسار الحرج، إذ أنه يشكل أطول طريق زمني بين نقطتي البداية والنهاية، وبعبارة أخرى إنه يشكل أكبر فترة زمنية يحتاجها المشروع لإتمامه ومقدار هذه الفترة = 16 أسبوعاً. ولكن لماذا هذا المسار يمثل أفضل مسار رغم أنه أطول زمن يأخذه؟ نستطيع أن نقول بأن هذا المسار الحرج لا يوجد به وقت ضائع. وعن طريق خريطة الأعمدة التالية نستطيع أن نتبين من ذلك.

شكل (9 ـ 5) خريطة الأعمدة



ملخص للخطوات التي يجب اتباعها لتحديد المسار الحرج على شبكة المشروع

1 ـ تحديد أنشطة المشروع وتحديد العلاقات بين هذه الأنشطة بالإضافة إلى تحديد الوقت اللازم لتنفيذ كل نشاط.

2 ـ رسم أو بناء شبكة المشروع مع مراعاة التسلسل لتنفيذ الأنشطة تبعاً للعلاقات بينها.

3 ـ تحديد الزمن المبكر للبدء (وقت البداية) لكل نشاط ويساوي مجموع الأزمنة التي تسبق النشاط. دائماً يكون يساوي صفراً لأول نشاط (أنشطة) في بداية المشروع.

4 ـ تحديد الزمن المبكر للإنجاز (الإنهاء المبكر) لكل نشاط ويساوي مجموع الأزمنة التي تسبق النشاط + مدة إنجاز النشاط نفسه.

5 ـ تحديد البداية المتأخرة لكل نشاط ويساوي أقصى تأخير (تأجيل) في الأزمان المبكرة للأنشطة بحيث لا يؤثر ذلك التأخير في إنجاز المشروع.

6 ـ تحديد النهاية المتأخرة للإنجاز لكل نشاط، ويساوي زمن البداية المتأخرة للنشاط + مدة إنجاز النشاط نفسه.

7 ـ تحديد الوقت الفائض = زمن البداية المتأخرة ـ الزمن المبكر للبدء.

= زمن النهاية المتأخرة للإنجاز ـ الزمن المبكر للإنجاز.

ويمثل الوقت الفائض الفترة الزمنية التي يمكننا بمقدارها تأخير البدء بتنفيذ وظيفة أو مجموعة من الوظائف دون أن يؤدي هذا التأخير إلى التأخير في إنجاز المشروع.

تخفيض فترة تنفيذ المشروع:

الهدف الثاني لتحليل الشبكات هو تخفيض فترة تنفيذ المشروع. تقدر فترة تنفيذ المشروع عادة بفترة المسار الحرج للشبكة البيانية، وقد تظهر الحاجة ملحة في بعض الظروف إلى تقليص فترة إنجاز المشروع، أو إلى تقليص فترة مرحلة من مراحل المشروع، فعندما نلجأ إلى ما يدعى **(عمليات المقايضة)**، وتعني هذه العمليات، إمكانية التبادل بين التكلفة والزمن Time-Cost, Trade-Off من أجل تقليص الفترة الزمنية بزيادة رأسمال الموضوع في المشروع (مثال بناء المنزل).

تخفيض أو تقليص الفترات الزمنية للمسار الحرج يتبعه عادة دراسة مقارنة لمراحل الإنتاج أو البناء التي يمكن معها تقليص (تخفيض) فتراتها الزمنية، إذ أن كثيراً من المراحل لا يمكن تقليص فتراتها الزمنية بسبب نوعية العملية الإنتاجية أو الإنشائية (مثلاً حاجات التبريد البطيء للمعادن، حالات الجفاف للإسمنت المسلح، وغيرها)، كما لا بد من دراسة المنفعة الحدية للتقليص والفائدة التي نحصل عليها مقابل زيادة النفقات.

قد يتضح من حساب المسار الحرج لتنفيذ مشروع معين أن الزمن اللازم للتنفيذ في ظل الظروف العادية أطول مما هو مرغوب. والواقع أنه كلما كان المشروع كبيراً، وكلما طالت فترة تنفيذه، ازدادت درجة المخاطرة في ما يتعلق بالعائد أو المنفعة المرجوة منه وأصبح أكثر تعرضاً للتأثر بالتقادم التقني. ولا شك أن معظم الأنشطة التي يلزم لتنفيذها فترة طويلة من الزمن يمكن تنفيذها في فترات أقل بتكاليف أكبر. فالعمل الإضافي تكلفته

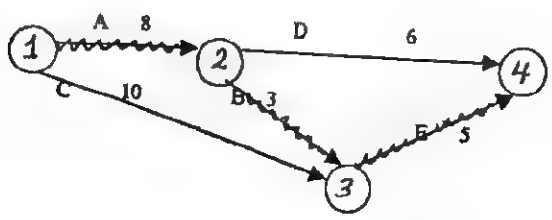
أعلى من العمل في الأوقات العادية، كما أن تكثيف الموارد في مشروع معين يؤدي إلى فقدان العائد الذي يمكن الحصول عليه بانتشارها في عدد من المشروعات بدلاً من مشروع واحد.

وقد يترتب على ذلك أنه عندما يتم تقدير أزمنة إنجاز الأنشطة المختلفة، يؤخذ في الاعتبار عامل التكلفة بالإضافة إلى عامل الزمن، عن طريق تقدير زمنين (على الأقل) لإنجاز كل نشاط. وعادة ما يكون أحد هذين الزمنين منطوياً على الظروف الطبيعية التي لا تتطلب تكثيف الموارد ولا تقتضي التعجيل بالتنفيذ، ويكون الزمن الآخر مقدراً على أساس تكثيف الموارد والتعجيل بالتنفيذ. وبالتالي يصبح لكل نشاط تكلفتان للتنفيذ إحداهما للزمن العادي والأخرى للزمن المعجل، ومن الطبيعي أن تكون تكلفة التعجيل أعلى من تكلفة التنفيذ في الظروف العادية.

ولا شك في أن علاقة الزمن بالتكلفة تختلف من نشاط إلى آخر على حسب طبيعة الموارد اللازمة لتنفيذه وبرنامج التعجيل الزمني الملائم لإنجازه، وعادة ما تكون هذه العلاقة في حقيقتها غير خطية حيث من المنطقي أنه كلما زاد تكثيف الموارد انخفضت إنتاجيتها في الوقت الذي ترتفع فيه تكلفتها. فتوفير وحدة زمنية واحدة من الوقت اللازم لإنجاز نشاط معين لا شك يتطلب تكلفة مضافة تقل عن التكلفة المضافة لتوفير الوحدة الزمنية التالية. وبالرغم من ذلك يفترض عادة أنه في ظل مدى تعجيل زمني معين تكون العلاقة بين الزمن والتكاليف خطية للأنشطة المرغوب التعجيل بتنفيذها في حدود ذلك المدى.

ومن المنطقي أن تكون علاقة الزمن بالتكاليف عكسية؛ أي أنه كلما طال الزمن المسموح به لإنجاز نشاط معين قلّت التكاليف اللازمة لإنجاز هذا النشاط. وهذا بالطبع يفترض ثبات معدلات الأسعار والأجور على مدار فترة التنفيذ العادية. كما أنه كلما قصرت الفترة الزمنية المسموح بها لإنجاز نفس النشاط زادت التكاليف اللازمة للإنجاز (للعمل الإضافي وتكثيف الموارد مثلاً). ولنفرض على سبيل الإيضاح المثال رقم (1) على الشكل (10 ـ 5).

شكل (10 ـ 5)



وبافتراض أن الزمن الذي يمكن تخفيضه والتكاليف المباشرة للمشروع مبينة في الجدول (8 ـ 5).

جدول (8 ـ 5) الزمن والتكاليف

الأنشطة	الزمن العادي	التكاليف العادية	الزمن الذي يمكن تقليصه	التكاليف التي يمكن إضافتها
A	8	12000	6	13600
B	3	14000	2	17000
C	10	6000	7	10500
D	6	8000	4	10000
E	5	7000	2	9700
		47000		

المطلوب:

1 ـ إحسب مجموع التكاليف المباشرة لإنهاء المشروع بزمن 16، 15، 14، 13، 12، 11 أسبوعاً.

2 ـ التكاليف غير المباشرة للمشروع موضحة في الجدول (9 ـ 5). إرسم التكاليف الكلية للمشروع (المباشرة وغير المباشرة) وأوجد زمن الإنهاء للمشروع الذي يبين أقل تكلفة ممكنة؟

جدول (9 ـ 5) التكاليف غير المباشرة

زمن إنهاء المشروع	16	15	14	13	12	11
التكاليف غير المباشرة (دينار)	23000	19100	17200	14400	13700	13200

الحل:

(1) يمكن وضع الجدول التالي الذي يبين التكلفة المتزايدة (التكلفة الإضافية) الناشئة عن تخفيض أو تقليص زمن كل نشاط.

التكلفة الإضافية = أقصى تكلفة يمكن إضافتها ـ التكاليف العادية ÷ الزمن العادي ـ أقل زمن يمكن تخفيضه

جدول (10 ـ 5) التكاليف الإضافية

الأنشطة	الزمن والتكاليف العادية		أقل زمن يمكن تخفيضه	أقصى تكلفة يمكن زيادتها	التكاليف الإضافية نتيجة التخفيض (دينار/أسبوع)	التقليص (التخفيض)	
	الزمن	التكلفة	الزمن	التكاليف		أعلى	المستعمل
A	8	12000	6	13600	800	2	//
B	3	14000	2	17000	3000	1	—
C	10	6000	7	10500	1500	3	/
D	6	8000	4	10000	1000	2	/
E	5	7000	2	9700	900	3	///

التكاليف الإضافية للنشاط (A) = 13600 ـ 12000 ÷ 8 ـ 6 = 1600 ÷ 2 = 800 دينار/أسبوع.

الخطوات التي يجب اتباعها في حال تخفيض زمن الشبكة:

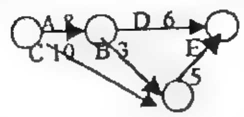
1 ـ يمكن تخفيض أي نشاط يقع على المسار الحرج بحيث يكون هذا النشاط يمثل أقل تكلفة متزايدة من الأنشطة الأخرى.

2 ـ في حالة وجود نشاط معين يمثل أقل تكلفة متزايدة ويقع في المسار الحرج، ولكن هذا النشاط في حالة تخفيضه لا يؤثر في زمن الشبكة فيجب النظر إلى نشاط آخر يقع في المسار الحرج.

الأشكال التالية (6، 5، 4، 3، 2، 1 / 11 ـ 5) تبين الاحتمالات في تخفيض زمن الشبكة البيانية السابقة وهي كالآتي:

شكل (11 ـ 5) الشبكات البيانية المحتملة

(1)

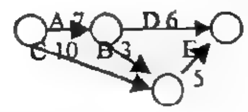


الزمن العادي = 16 أسبوعاً

التكاليف العادية = 47000

المسار الحرج
$A \rightarrow B \rightarrow E = CP$

(2)



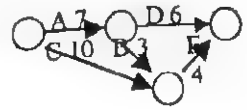
النشاط الذي يمكن تخفيضه والذي يقع في المسار الحرج ويمثل أقل تكلفة إضافية هو النشاط (A). التخفيض بأسبوع واحد

الزمن الآن = 15 أسبوعاً

التكاليف الجديدة = 47800 = (800) 1 + 47000

المسار الحرج A,B,E
C,E (CP)

(3)



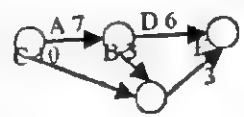
النشاط الذي يمثل أقل تكلفة إضافية هو النشاط (A). ولكن في هذه الحالة لا يخفض زمن الشبكة. البديل الآخر هو النشاط (E).

الزمن الآن = 14 أسبوعاً

التكاليف الجديدة = 47800 + 1 (900) = 48700

لمسار الحرج A, B, E,
C, E = (CP)

(4)



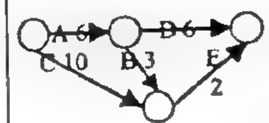
في هذه الحالة يكون أفضل نشاط يمكن تخفيضه هو النشاط (E) بأسبوع واحد

الزمن الآن = 13 أسبوعاً

التكاليف الجديدة = 48700 + 1 (900) = 49600

المسار الحرج (CP) = كل المسارات في الشبكة تعتبر مسارات حرجة

(5)



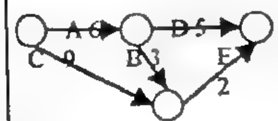
يمكن تخفيض النشاط (E) بأسبوع آخر والنشاط (A)

الزمن الآن = 12 أسبوعاً

التكاليف الجديدة = 49600 = (800) 1 + (900) 1 + 51300

المسار الحرج (CP) =
A,D C,E

(6)



يمكن تخفيض زمن النشاط (C), (D)

الزمن الآن = 11 أسبوعاً

التكاليف الجديدة = 51300 = (1500) 1 + (1000) 1 + 53800

المسار الحرج (CP) = كل المسارات في الشبكة تعتبر مسارات حرجة

(*) المقصود بـ Critical Path (CP) (المسار الحرج).

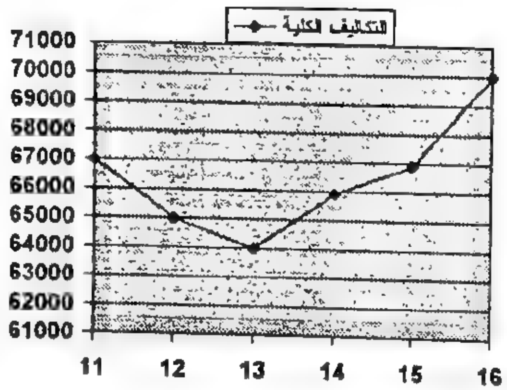
(2) الجدول (11 ـ 5) يبين الزمن والتكاليف الكلية:

جدول (11 ـ 5) التكاليف المباشرة وغير المباشرة والكلية

الزمن	11	12	13	14	15	16
التكاليف المباشرة	53800	51300	49600	48700	47800	47000
التكاليف غير المباشرة	13200	13700	14400	17200	19100	23000
مجموع التكاليف	67000	65000	64000	65900	66900	70000

الآن يمكن رسم الشكل البياني الذي يمثل الزمن والتكاليف في الشكل (12 ـ 5)

شكل (12 ـ 5) منحنى التكاليف الكلية



من خلال الرسم البياني (12 ـ 5) يمكن أن نقارن بين الزمن والتكلفة. فنجد أن الزمن 13 أسبوعاً هو الذي يحقق أقل تكلفة (64000)

الأنشطة الوهمية أو التخيلية أو الافتراضية Dummy Activity:

في بعض الأحيان نحتاج إلى بعض الأنشطة الوهمية وذلك لتوضيح بعض العلاقات التابعية، مثلاً أن نشير إلى أن حدثاً معيناً لا يمكن أن يحدث قبل حدث آخر، وترسم سهماً يربط بين الحدثين رغم علمنا بأنه لا يوجد نشاط حقيقي بين هذين الحدثين، حيث إن هذا السهم يعبر عن نشاط وهمي Dummy Activity. ويعرف النشاط الوهمي على أنه النشاط الذي لا يستغرق وقتاً ولا يحتاج إلى موارد (وقته = صفر) ويرسم بخطوط متقطعة لتميزه عن النشاط الحقيقي.

ويمكن أن نستخدم الأنشطة الوهمية في الحالات التالية:

1 ـ للتعبير عن علاقات منطقية متابعة بين الأنشطة المختلفة حيث لا يمكننا أن نعبر عنها بطريقة أفضل.

2 ـ من أجل تفادي الربط بين حدثين بأكثر من نشاط، حيث إنه يمكن أن يكون عندنا نشاطان متوازيان ولكن يجب أن لا يربطا بحدثين.

3 ـ تستخدم الأنشطة الوهمية أحياناً للإيضاح، حيث يجب أن يكون للشبكة نقطة بداية واحدة ونقطة نهاية واحدة أيضاً.

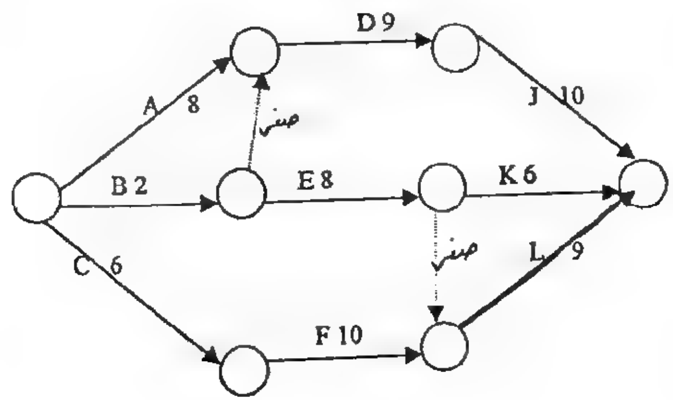
مثال رقم (7) يبين كيفية تحديد الأنشطة الوهمية على الشبكة البيانية:

جدول (12 ـ 5)

النشاط	أسبقية الأنشطة	الزمن اللازم بالساعة
A	-	8
B	-	2
C	-	6
D	AB	9
E	B	8
F	C	10
J	D	10
K	E	6
L	FE	9

المطلوب: بناء الشبكة البيانية وتحديد الأنشطة الوهمية داخل الشبكة.

شكل (13 ـ 5)



II ـ طريقة بيرت أو أسلوب تقييم ومراجعة البرامج
Program Evaluation Review Technique (PERT):

تستخدم طريقة «بيرت» كأداة مساعدة لدراسة إمكانية تقصير المسار الحرج في الشبكة البيانية ولمعرفة مدى الاحتياطي من الزمن الذي يمكن استغلاله في باقي المسارات غير الحرجة ودون بذل أية خسارة زمنية، إذ أن تقليص أو تمديد الفترة الزمنية لأي عمل يعتمد على زيادة أو نقصان النفقات المصروفة على هذا العمل، والسؤال الذي يمكن أن يطرح نفسه الآن هو إمكانية وضع الشبكة البيانية بحيث يتمثل فيها أقل ضياع للنفقات من أجل تحقيق العمل المطلوب وبأقل تكلفة ممكنة، وذلك انطلاقاً من الفترات الزمنية المتاحة والمناسبة للمشروع، ولذا كان لا بد من وجود معدل عام لاستمرار فترات العمل لكل حادثة وما يتبعها من نفقات، يعتمد عليه خلال معالجة عمليات المقارنة بين الوقت المخفض أو المسرع ووقت العمل الطبيعي، ويستخدم من أجل تحديد هذا المعدل ثلاثة أنواع من التقديرات هي:

أ ـ تقدير الوقت المتفائل (Optimistic Time) ونرمز له بالحرف (O) وهو الوقت المقدر للانتهاء من العمل بين حادثتين، مأخوذاً لحدوده الدنيا، بحيث تكون جميع الشروط ملائمة لسير العمل دون أية عراقيل في التنفيذ، وهذا يمثل الوقت الأمثل لتحقيق الحادثة، ولا يمكن تقليل هذه الفترة إلى ما دون ذلك إلا بزيادة النفقات.

ب ـ تقدير الوقت الأكثر احتمالاً (Most Likely Time) ونرمز له بالحرف (M). وهو الوقت اللازم للانتهاء من العمل بين حادثتين، مأخوذاً من خلال التجربة والممارسات لمثل هذه الأعمال والحوادث.

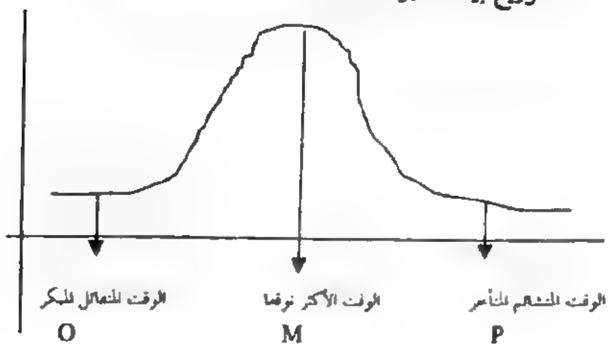
جـ ـ تقدير الوقت المتشائم (Pessimistic Time) ونرمز له بالحرف (P). وهو الوقت اللازم للانتهاء من العمل بين حادثتين، باعتبار جميع الظروف السيئة التي يمكن أن تطرأ على المشروع أثناء القيام بالعمل.

الوقت المتوقع: يحدد المعدل العام لاستمرارية فترات العمل بين كل حادثين، من خلال مؤشر سوف ندعوه «بالوقت المتوقع» وبحيث نرمز له بالحرف (Tij)، ويعبر هذا المؤشر عن التوقع لاستمرارية العمل بين الحادثة السابقة (I)، والحادثة اللاحقة (j)، ويقدر «الوقت المتوقع» بالوسطي المثقل لجميع التقديرات السابقة للأوقات وحسب العلاقة التالية:

$$Tij = \frac{O+4M+P}{6}$$

شكل (14 ـ 5)

توزيع بيتا لتقديرات الوقت Beta distribution

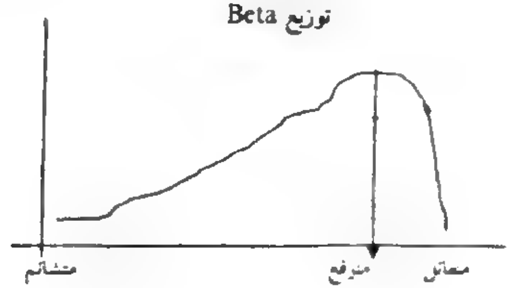


أما التباين المتوقع لاستمرارية العمل (Tij) فإنه يعطى من خلال العلاقة التالية:

$$\boxed{Var. = (\frac{P-O}{6})^2}$$

شكل(5 - 14A)

توزيع Beta



ومنها يمكن الحصول على الانحراف المعياري.

$$\boxed{S = \frac{P-O}{6} =}$$

وتستخدم (Tij) للتعبير عن الفترة الزمنية لإنجاز النشاط القادم من الحادثة (I) والمتجهة إلى الحادثة (j) وذلك بالنسبة لكل حادثة من حوادث الشبكة، وبناء على هذا المفهوم يمكن أن نحدد عدداً من المؤشرات التي تستخدم بشكل واسع في تحليل الشبكات البيانية حسب طريقة بيرت وهي:

1 ـ الوقت المبكر لبدء النشاط The Early Start Time (EST) وهو الوقت المحدد لبدء النشاط الجديد بعد الانتهاء من الحوادث السابقة.

2 ـ الوقت المبكر للانتهاء من النشاط The Early Finish Time (EFT) وهو الوقت المحدد للانتهاء من النشاط إذا كان قد بدأ في نفس الوقت المبكر لبدء العمل.

3 ـ الوقت المتأخر لبدء النشاط The Late Start Time (LST) وهو آخر وقت زمني يمكن فيه بدء العمل دون الإخلال بالوقت العام للمسار الحرج، وباعتبار الوقت المتأخر للحوادث السابقة، إذ لا يمكن البدء بالنشاط إلا بعد الانتهاء من الحوادث السابقة.

4 ـ الوقت المتأخر من النشاط The Late Finish Time (LFT) وهو آخر وقت زمني يمكن لنا فيه الانتهاء من إنجاز العمل المؤدي إلى الحادثة وذلك دون الإخلال بالوقت العام للمسار الحرج.

5 ـ الوقت المبكر للنشاط Early Time (ET) وهو الوقت الذي مضى على الإنشاء أو على البضاعة حتى وصولها هذه الحادثة، ويحسب الوقت المبكر عادة من العلاقة التالية:

$$ET(j) = ET(I) + Tij$$

6 ـ الوقت المتأخر للنشاط Late Time (LT) وهو الوقت الباقي للانتهاء من المشروع أو للانتهاء من العملية الإنتاجية، ويحسب هذا الوقت من خلال العلاقة التالية:

$$LT(I) = LT(j) - Tij$$

إن الهدف من التحليل الشبكي بطريقة بيرت هو الحصول على هذين المؤشرين بالنسبة لكل حادثة من الحوادث (ET, LT) بالإضافة إلى تحديد الفائض من الوقت (Slack Time) للاستفادة منه في توفير الوقت أو تخفيضه أو زيادة الإنتاج، ويحسب فائض الوقت عادة من العلاقات التالية:

$$Sj = Lti - ET$$

$$= LS - ES$$

$$= LF - EF$$

$$= LF - ES - D$$

$$EF = ES + D$$

$$LS = LF - D$$

بحيث D = الوقت اللازم للنشاط

أما بالنسبة لجميع الحوادث الواقعة على المسار الحرج، فنجد أنها لا تحتوي على وقت فائض، إذ أن جميع النشاطات فيها تحقق العلاقة:

$$ET = LT$$

من أجل البحث عن الوقت المتأخر (LT) والوقت المبكر (ET) للحوادث في أية شبكة بيانية، لا بد من البدء في الحسابات انطلاقاً من الحادثة الأولى وحتى الحادثة الأخيرة بالنسبة للوقت المبكر (ET)، وبالعكس فإننا نبدأ بالحسابات من الحادثة الأخيرة أو النهائية في الشبكة وحتى أول حادثة وذلك بالنسبة للوقت المتأخر (LT)، بحيث نحصل على قيم صفرية لكل من الوقتين (LT, ET) بالنسبة للحادثة البدائية. أما باقي الحوادث التي تقع على المسار الحرج فإن الوقت المبكر (ET) والوقت المتأخر (LT) يكونان متساويين وحسب العلاقات التالية:

وقت المسار الحرج = ET = LT بالنسبة للحادثة النهائية

ET = LT = 0 بالنسبة للحادثة البدائية

حوادث المسار الحرج = ET = LT بالنسبة لأية حادثة تقع على المسار الحرج

وتوضع قيم (ET) ضمن شكل مربع (□) إلى جانب كل حادثة، كما توضح قيم (LT) ضمن شكل مثلثي (△) إلى جانب نفس الحادثة، بحيث يمكن لنا معرفة **الوقت الفائض** بالنسبة لكل حادثة من خلال نظرة بسيطة إلى الشبكة، وطرح الوقت المبكر (ET) من الوقت المتأخر (LT).

ويمكن توضيح ما سبق تعريفه عن طريق **المثال رقم (8)**، ولنحسب من خلاله وبطريقة بيرت الوقت المتوقع (Tij) ـ الوقت المبكر (ET) والوقت المتأخر (LT) لكل حادثة ومن ثم يمكن أن نصل وبسهولة إلى تحديد المسار الحرج من خلال الوقت الفائض كما هو واضح في المثال التالي:

مثال رقم (8) لقد توفرت لدينا المعلومات الموضحة حسب الجدول التالي لشبكة بيرت:

جدول (13 ـ 5)

الأنشطة (العمل)	الأنشطة السابقة لها	زمن الأنشطة: الوقت لمتفائل O	الوقت الأكثر احتمالاً M	الوقت المتشائم P	الحدث الأول	الحدث الثاني
A	—	5	6	13	1	2
B	—	2	7	12	1	3
C	A	1.5	2	2.5	2	4
D	A	1	3	5	2	5
E	B	4	5	6	3	5
F	B	1	1	1	3	6
G	C	2	3	10	4	7
K	DE	4	5	6	5	7
L	F	3	5	7	6	7

المطلوب:

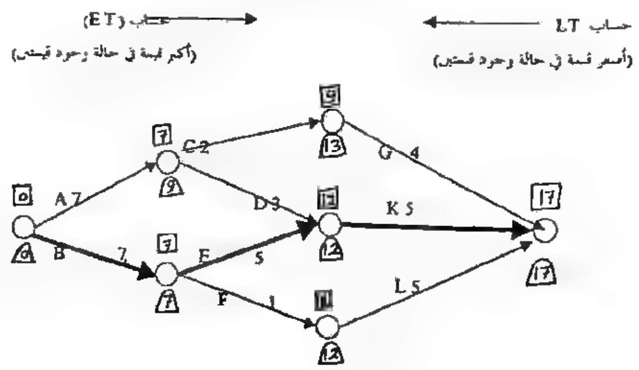
1 ـ رسم الشبكة البيانية، وحساب الوقت المتوقع (Tij)، والانحراف المعياري، ثم تحديد المسار الحرج على الشبكة.

2 ـ أوجد الوقت المبكر (ET) والوقت المتأخر (LT). واحسب الوقت الفائض لكل الأنشطة الموجودة في الشبكة.

الحل:

(1) بناء على الجدول السابق يمكننا رسم شبكة بيرت PERT كالآتي:

شكل (15 ـ 5)



يمكن تحديد المسارات المختلفة لهذه الشبكة وهي كما في الجدول (14 ـ 5)

جدول (14 ـ 5)

الزمن	المسارات
المسار الأول 13 = 4 + 2 + 7	1-2-3-4-7 (A-C-G)
المسار الثاني 15 = 5 + 3 + 7	1-2-5-7 (A-D-K)
المسار الثالث 17 = 5 + 5 + 7	1-3-5-7 (B-E-K)
المسار الرابع 13 = 5 + 1 + 7	1-3-6-7 (B-F-L)

إذاً المسار الثالث (B-E-K) هو المسار الحرج لأنه يمثل أطول زمن وهو (17)

يمكن تحديد الوقت المتوقع عن طريق استخدام القانون التالي:

الوقت المتوقع (Tij) = الوقت المتفائل + 4 (الوقت الأكثر احتمالاً) + الوقت المتشائم ÷ 6 =

$$Tij = \frac{O+4M+P}{6}$$

مثلاً يمكن حساب الوقت المتوقع للنشاط $Tij = \frac{5+4(6)+13}{6} = 7(A)$

وهكذا يمكن حساب الوقت المتوقع لكل الأنشطة الموجودة في الشبكة البيانية وهي كما في الجدول (15 ـ 5)

جدول (15 ـ 5)

الأنشطة	A	B	C	D	E	F	G	K	L
الأحداث	1-2	3-1	4-2	5-2	5-3	6-3	7-4	7-5	5-6
الوقت المتوقع $\frac{O+4M+P}{6}$	7	7	2	3	5	1	4	5	5

بالرجوع إلى الجدول (13 ـ 6) يمكن حساب التشتت لكل الأنشطة. مثلاً الانحراف المعياري للنشاط (A) يمكن حسابه عن طريق القانون التالي:

$(\frac{P-O}{6}) = \frac{13-5}{6} = \frac{4}{3}$ = الانحراف المعياري

أي أن التباين للنشاط (A):

$$Var. = (\frac{P-O}{6})^2 =$$

$$= (\frac{13-5}{6})^2 = (\frac{4}{3})^2 =$$

الجدول (16 ـ 5) يبين التباين والانحراف المعياري لكل الأنشطة

جدول (16 ـ 5)

الأنشطة	A	B	C	D	E	F	G	K	L
الأحداث	1-2	3-1	4-2	5-2	5-3	6-3	7-4	7-5	5-6
الانحراف المعياري $(\frac{P-O}{6})$	1.3	1.7	.16	.7	.3	0	1.3	.3	.7
التباين $(\frac{P-O}{6})^2$	1.7	2.9	.03	.5	.09	0	1.7	.09	.5

(2) الوقت المبكر (ET) والوقت المتأخر (LT) والوقت الفائض لكل الأنشطة الموجودة في الشبكة مبينة في الجدول (17 ـ 5)

جدول (17 ـ 5)

الأنشطة	الأحداث	الزمن	الوقت المبكر لبدء النشاط **ES**	الوقت المتأخر لبدء النشاط **LS** LS =LF - D	الوقت الفائض **Slack** = LS -ES = LF-EF = LF -ES -D	الوقت المبكر لانتهاء النشاط **EF** EF = ES + D	الوقت المتأخر لانتهاء النشاط **LF**
A	2-1	7	0	2	2	7	9
B	3-1	7	0	0	0	7	7
C	4-2	2	7	11	4	9	13
D	5-2	3	7	9	2	10	12
E	5-3	5	7	7	0	12	12
F	6-3	1	7	11	4	8	12
G	7-4	4	9	13	4	13	17
K	7-5	5	12	12	0	17	17
L	7-6	5	8	12	4	13	17

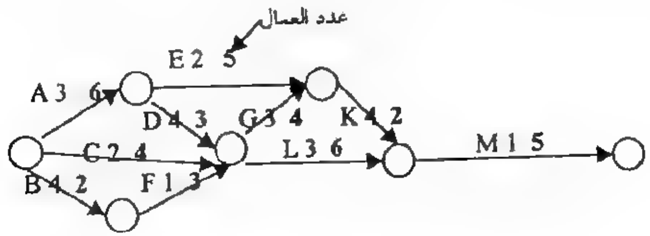
تحليل الموارد Resources Analysis:

بعد قياس الوقت الفائض في شبكة المشروع ووقت حدوثه، نبحث الآن في عملية إعادة تخطيط بعض الأنشطة من حيث وقت البداية ووقت الانتهاء بغرض وضع أفضل خطة لتشغيل الموارد، ويطلق على هذه العملية إعادة تخصيص الموارد. فالوقت الذي تم حسابه في الشبكة يعتبر الأساسي في تقدير الموارد المستخدمة، كما أن العلاقة بين هذا الوقت وتلك الموارد عادة ما تكون علاقة خطية بسيطة أي أنه كلما زادت الموارد المشغلة

في نشاط ما قصر الوقت الإنجازي اللازم لهذا النشاط بغرض إتمامه. وتبدأ هذه العملية بحصر وتسجيل الموارد اللازمة لكل نشاط كما هو موضح في الشبكة البيانية في الشكل (16 ـ 5) (مثال رقم 9) وهي تشير للطاقة البشرية اللازمة لمشروع بسيط.

جدول (18 ـ 5)

الأنشطة	أسبقية الأنشطة	الزمن	الموارد
A	–	3	6
B	–	4	2
C	–	2	4
D	A	4	3
E	A	2	5
F	B	1	3
G	DCF	3	4
K	EG	4	2
L	DCF	3	6
M	KL	1	5



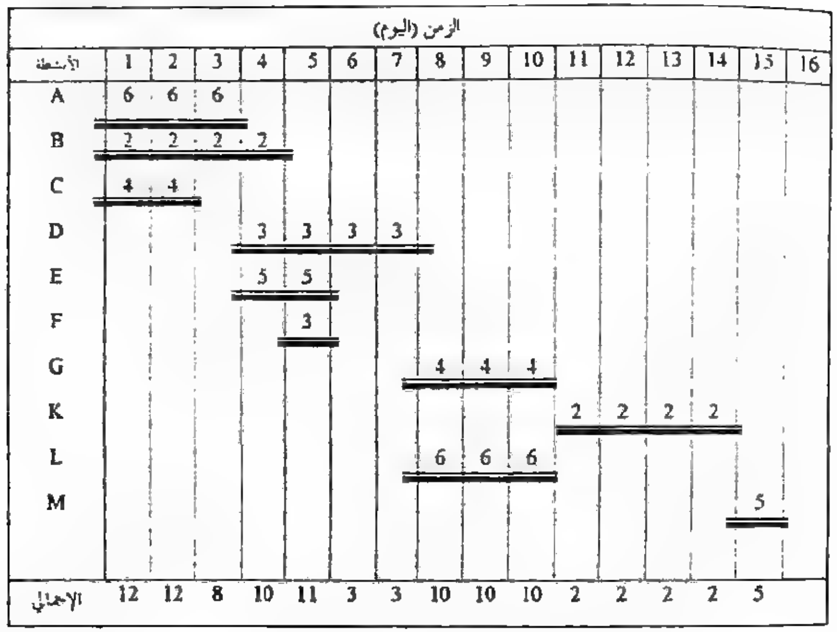
شكل (16 ـ 5) تسجيل الموارد على أنشطة شبكة الأعمال

وتساعد هذه الشبكة في حساب الموارد اللازمة لكل يوم من أيام المشروع كما سوف نوضح ذلك في خريطة الأعمدة (17 ـ 5). فتوضح الخطوط الغامقة(ـ) اللون الأنشطة والخطوط الخفيفة (ـ) اللون توضح الوقت الفائض والأرقام فوق الأنشطة توضح عدد الأفراد اللازمين.

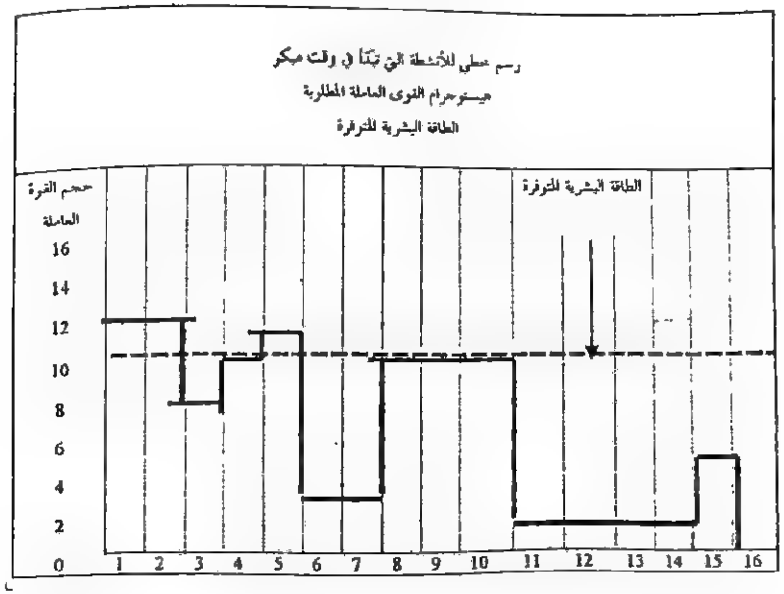
وبعد ذلك يتم رسم هستوجرام Histogram لتحديد حدود الموارد المتاحة، ومن ثم نتمكن من الاستفادة من الوقت الفائض المتاح في شبكة المشروع. فيمكن في الواقع الاستفادة من تخفيض الموارد الواقعة على الأنشطة غير الحرجة بتعديل وقتي البدء والانتهاء في حدود مستوى الموارد المتاحة، وهذا في الحقيقة هو روح هذه الطريقة في

تخطيط ومراقبة المشروعات. وفي الغالب ما يتطلب تحقيق جميع مميزات هذه الطريقة عن طريق زيادة الوقت الإجمالي للمشروع في بعض الأوقات، ولكن على الأقل تتضح الصورة أمام الإدارة حول المقارنة بين زيادة الموارد حتى يتم المشروع في الوقت المقرر المخطط، أو السماح للمشروع أن يتم في وقت أطول.

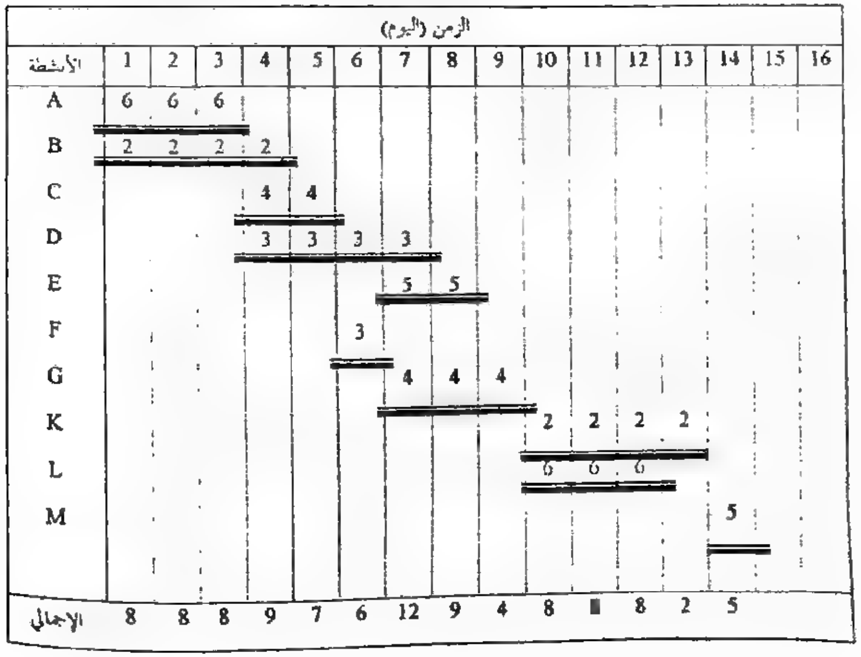
شكل (17 ـ 5) خريطة الأعمدة ـ رسم خطي للأنشطة التي تبدأ مبكراً



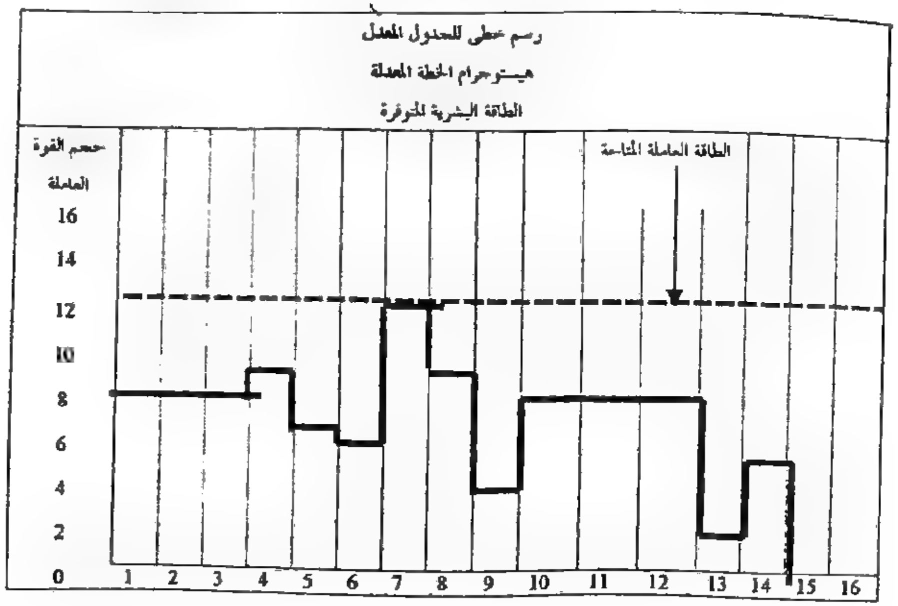
شكل (18 ـ 5)



شكل (19 ـ 5) خريطة أعمدة ـ رسم خطي للجدول المعدل



شكل (20 ـ 5)



مثال رقم (10) مشروع معين يتطلب تنفيذه إتمام سبعة أنشطة. ولقد كانت المعلومات المتعلقة بالأنشطة وأسبقيتها وعدد العاملين والمدة اللازمة لتنفيذ كل نشاط مبينة في الجدول (19 ـ 5).

جدول (19 ـ 5).

الأنشطة	الأنشطة التي تسبقها	الزمن/شهر	عدد العاملين
A	—	2	2
B	—	3	3
C	A	3	1
D	A	1	4
E	B	2	3
F	C	4	5
G	DE	1	6

المطلوب:

1 ـ بناء الشبكة البيانية لهذا المشروع وتحديد المسار الحرج.

2 ـ حدد الوقت المبكر (ET) والوقت المتأخر (LT) للأنشطة على الشبكة البيانية.

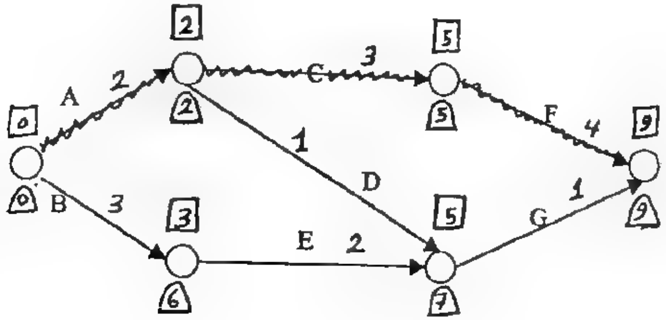
3 ـ إرسم خريطة الوقت وجدول الموارد لهذه الشبكة.

الحل:

1 ـ بناء الشبكة البيانية للمشروع وتحديد المسار الحرج.

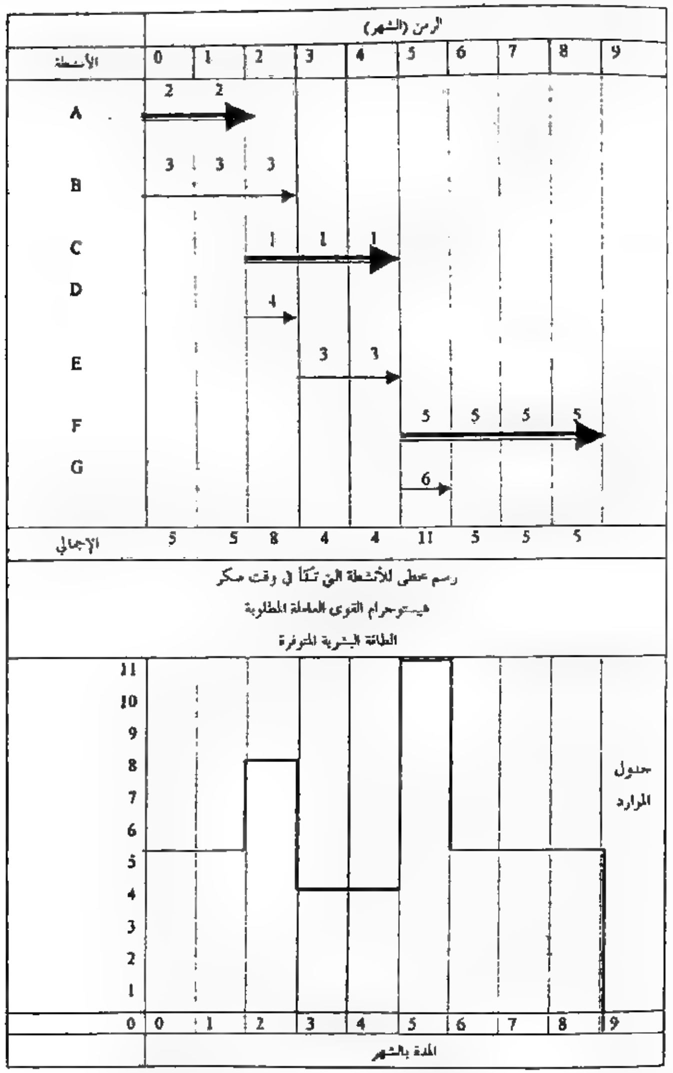
2 ـ الوقت المبكر (ET) والوقت المتأخر (LT) للأنشطة.

شكل (21 ـ 5)



3 ـ رسم خريطة الوقت وجدول الموارد لهذه الشبكة.

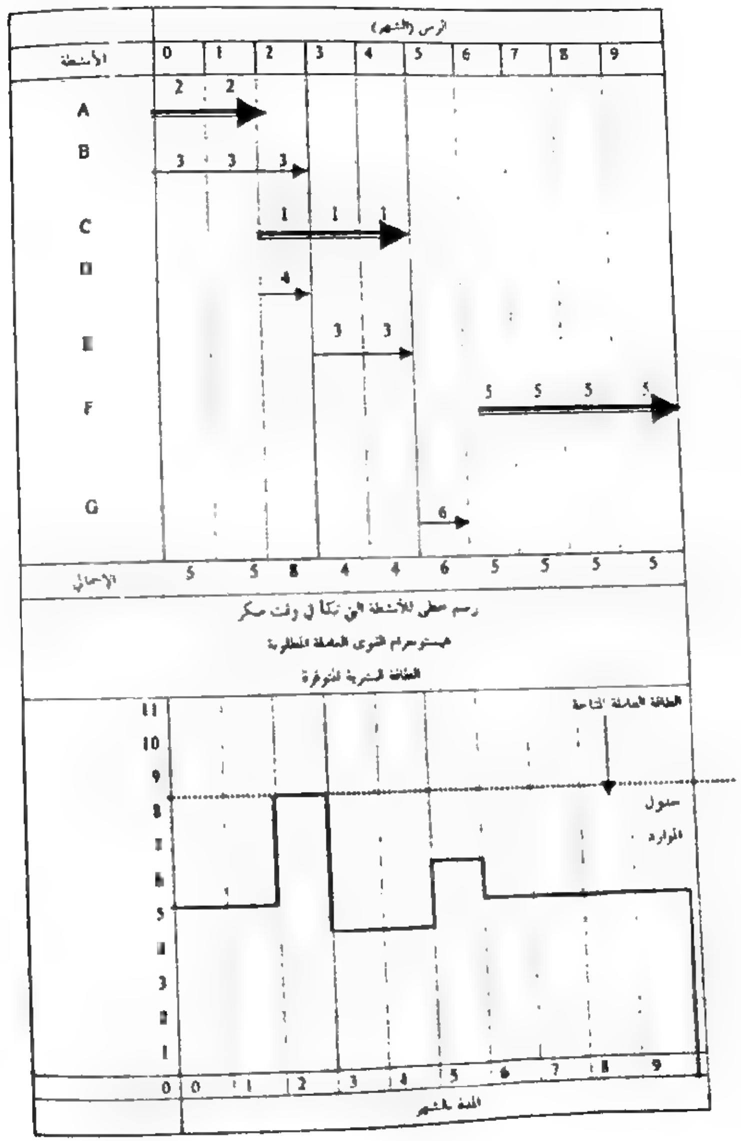
شكل (22 ـ 5) خريطة الأعمدة ـ رسم خطي للأنشطة التي تبدأ مبكراً



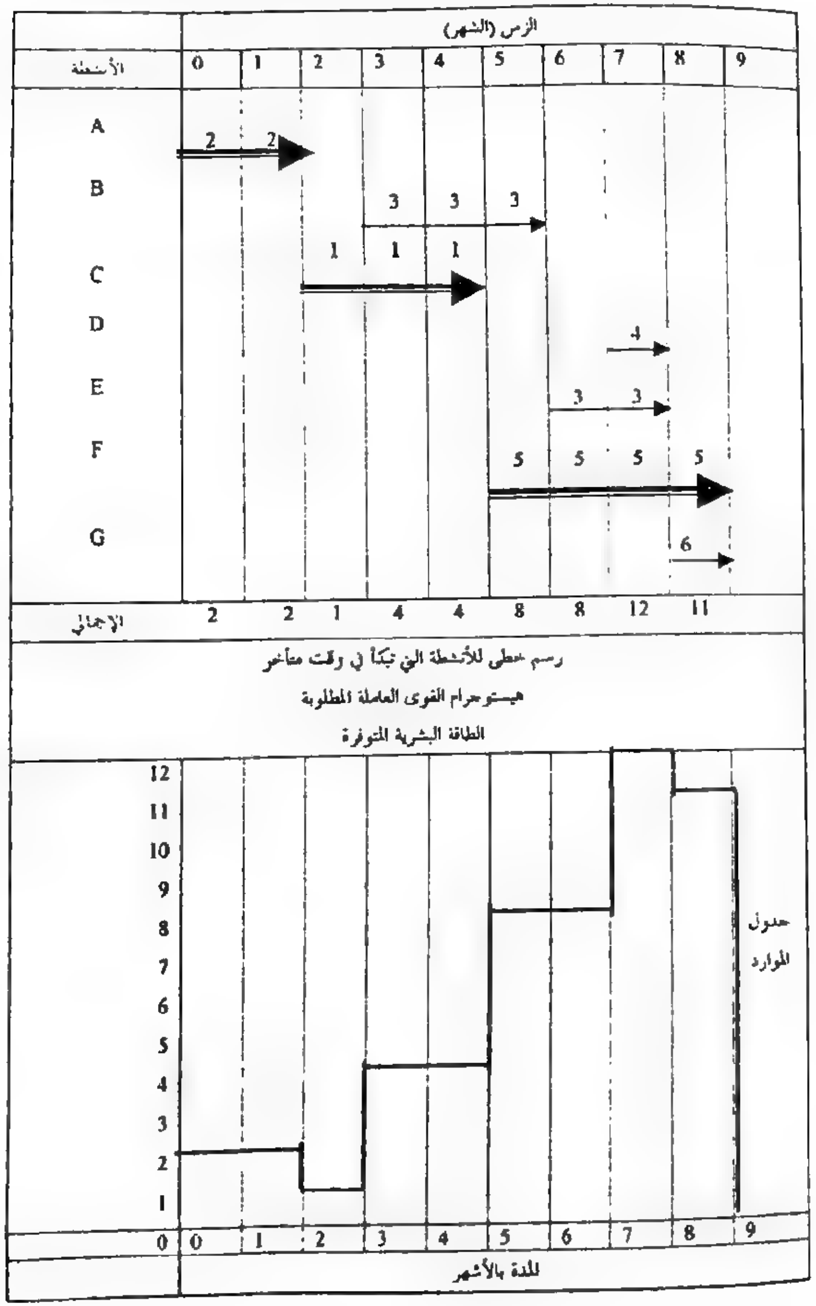
نلاحظ من الرسم السابق أن شهر (5) يمثل أعلى عدد للموارد البشرية التي يجب استخدامها في هذا المشروع (11 عاملاً). ولكن في بعض الحالات يجد المشروع نفسه أمام ندرة الموارد البشرية. ولنفرض أن العدد المتاح من العناصر البشرية في سوق العمل هو (8) فقط عن كل شهر. في ظل هذه القيود يجب على المشروع أن يقوم بعملية تحليل كل الأنشطة الموجودة في المشروع بحيث تستخدم فيها استراتيجية معينة لكل التداخل

المختلفة وعن طريق عملية الزحزحة لبعض الأنشطة، فيمكن عن طريق ذلك تخفيض عدد الموارد البشرية إلى العدد المسموح بذلك. الرسم التالي يبين عملية التخفيض والزحزحة لبعض الأنشطة.

شكل (23 ـ 5) خريطة الأعمدة ـ رسم خطي للأنشطة التي تبدأ مبكراً



شكل (24 ـ 5) خريطة الأعمدة ـ رسم خطي للأنشطة التي تبدأ مؤخراً



مشكلة أقصر مسار (Shortest Route Problem):

تتعلق هذه المشكلة بتحديد أقصر مسار بين نقطة البداية ونقطة النهاية في الشبكة البيانية التي تتكون من العديد من الأنشطة والأحداث. ويعني في هذه الحالة بأقصر مسار، هو المسار الذي يترتب عنه أو أنه يحقق أقل زمن تنفيذ ممكن وأقل إمكانيات معينة، وأقل تكلفة وغيرها. بمعنى أن الهدف الأساسي لمشكلة أقصر مسار (طريق) هو الوصول إلى أقل تكلفة معينة (التقليل) وليس التعظيم. ويمكن توضيح طبيعة هذه المشكلة عن طريق المثال رقم (11).

مثال رقم (11): نفرض أن مشروعاً معيناً يقوم بإنتاج سلعة معينة، وأن هذه السلعة يتم إنتاجها بواسطة آلة. ولقد كانت التنبؤات المتعلقة بسعر هذه الآلة وهي جديدة، وسعر إعادة بيعها كنسبة من ثمن شرائها، وتكاليف تشغيلها في السنة، وذلك خلال الخمس سنوات القادمة وهي مبينة في الجدول (20 ـ 5).

جدول (20 ـ 5)

السنة	1	2	3	4	5
سعر شراء الآلة	4000	4000	5000	5000	5000
سعر إعادة البيع كنسبة من ثمن الشراء	80%	70%	60%	45%	35%
تكاليف التشغيل السنوية للآلة	600	1000	1500	2400	3000

ونفترض أن مدير هذا المشروع يرغب في وضع خطة خماسية للطريقة التي سيتبعها في شراء واستبدال وتشغيل هذه الآلة، وأن مجموع التكاليف التي سوف يتكبدها المشروع من جراء هذه العمليات أقل ما يمكن. ولكن من خلال المعلومات السابقة لا يمكن حل هذه المشكلة حسب إجراءات تحليل الشبكات. بينما يمكن إجراء عمليات التحليل وحلها بواسطة مشكلة أقصر مسار. ولكن هذا يستلزم حساب الآتي:

- التكاليف المترتبة عن كل بدائل الشراء خلال الخمس سنوات القادمة.
- تكاليف إعادة البيع والتشغيل خلال الخمس سنوات القادمة.

ولو فرضنا أن السنوات الخمس القادمة هي السنوات (2002، 2003، 2004، 2005، 2006)، إذاً في هذه الحالة يمكن إجراء بعض الحسابات والتي هي مبينة في الجدول (21 ـ 5).

التكلفة المترتبة عن هذا الإجراء = الخسارة المترتبة عن عملية بيع الآلة بعد تشغيلها لمدة عام + تكاليف تشغيل الآلة خلال سنة 2002

جدول (21 ـ 5)

شراء الآلة	بيع الآلة	العمليات الحسابية	التكلفة المترتبة عن هذا الإجراء
2002\1\1	2002\12\31	20% x 4000 + 600	1400دينار
2002\1\1	2003\12\31	30% x 4000 + 600 + 1000 =	2800دينار
2002\1\1	2004\12\31	40% x 4000 + 600 + 1000 + 1500 =	4700 دينار
2002\1\1	2005\12\31	55% x 4000 + 600 + 1000 + 1500 + 2400 =	7700 دينار
2002\1\1	2006\12\31	65% x 4000 + 600 + 1000 + 1500 + 2400 + 3000 =	11100 دينار
2003\1\1	2003\12\31	20% x 4000 + 600 =	1400 دينار
2003\1\1	2004\12\31	30% x 4000 + 600 + 1000	2800 دينار
2003\1\1	2005\12\31	40% x 4000 + 600 + 1000 + 1500 =	4700 دينار
2003\1\1	2006\12\31	55% x 4000 + 600 + 1000 + 1500 + 2400 =	7700 دينار
2004\1\1	2004\12\31	20% x 5000 + 600 =	1600 دينار
2004\1\1	2005\12\31	30% x 5000 + 600 + 1000 =	3100 دينار
2004\1\1	2006\12\31	40% x 5000 + 600 + 1000 + 1500	5100 دينار
2005\1\1	2005\12\31	20% x 5000 + 600 =	1600 دينار
2005\1\1	2006\12\31	30% x 5000 + 600 + 1000	3100 دينار
2006\1\1	2006\12\31	20% x 5000 + 600 =	1600 دينار

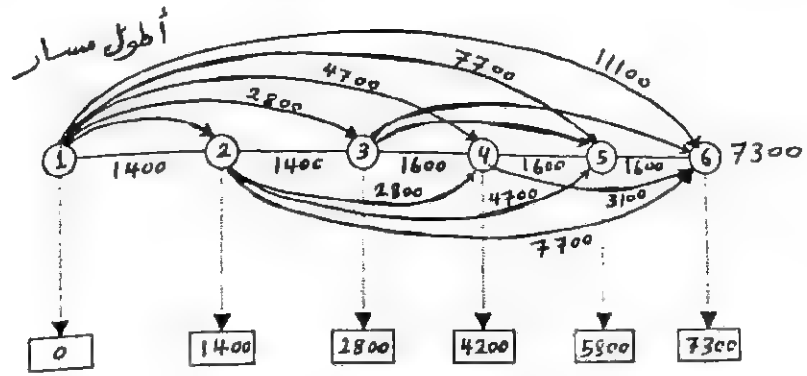
بعد حساب التكاليف، يمكن الآن تفريغ هذه البدائل المختلفة وتلخيصها في الجدول (22 ـ 5).

جدول (22 ـ 5)

السنوات	2002	2003	2004	2005	2006
2002	1400	2800	4700	7700	11100
2003	–	1400	2800	4700	7700
2004	–	–	1600	3100	5100
2005	–	–	–	1600	3100
2006	–	–	–	–	1600

من خلال الجدول (22 ـ 6)، الآن يمكن رسم الشبكة البيانية الممثلة لهذه البدائل.

شكل (25 ـ 5) شبكة البدائل



من خلال الشكل (25 ـ 5)، نجد أن أقصر مسار، هو المسار (1 ـ 2 ـ 4 ـ 6)، ويكون مجموع التكاليف في هذا المسار يمثل أقل تكلفة ممكنة بينما الخطة التي يجب اتباعها كالآتي:

1 ـ شراء الآلة في 2002/1/1 وتشغيلها خلال تلك السنة. ثم بيعها في نهاية نفس السنة.

2 ـ شراء الآلة في 2003/1/1، وتشغيلها خلال عامي 2003، 2004، ثم بيعها في نهاية 2004.

3 ـ شراء الآلة في 2005/1/1، وتشغيلها خلال سنة 2005، 2006، ثم بيعها في نهاية 2006.

وسوف تكون التكاليف المتعلقة على هذه الخطة = 7300 دينار، وهي أقل تكلفة ممكنة.

مشلكة أطول مسار (Longest Route Problem):

كما لاحظنا في المشكلة السابقة بأن الهدف كان هو التقليل (البحث عن أقل تكلفة ممكنة)، بينما في هذه الحالة يكون الهدف الأساسي هو البحث عن أعلى ربح ممكن (التعظيم). فيكون أطول مسار هو المسار أو الخطة التي تعظم الهدف، الذي يسعى المشروع إلى تحقيقه. فلا يوجد فرق بين هذه الطريقة والطريقة السابقة في الإجراءات، ما عدا في عملية اختيار أطول مسار بدلاً من المسار القصير، الذي اخترناه من قبل. ويمكن توضيح ذلك عن طريق المثال رقم (12).

مثال رقم (12): قام مصنع صغير بشراء آلة معينة وذلك لغرض تأجيرها، ولقد كانت تكلفة شرائها، والخسارة المترتبة عن بيعها، والعائد من التأجير في السنة، وذلك خلال السنوات الخمس القادمة مبينة في الجدول (23 ـ 5).

جدول (23 ـ 5)

السنة	1	2	3	4	5
سعر شراء الآلة	300	330	350	370	400
الخسارة كنسبة من ثمن الشراء	%10	%20	%30	%50	%70
العائد من التأجير في السنة	70	75	85	90	110

المطلوب: تحديد الاستراتيجية التي يجب على إدارة المصنع اتباعها في شراء وبيع وتأجير هذه الآلة لمشروع يفكر في شرائها، مما يجعل أرباحه أكبر ما يمكن، مع استخدام مشكلة أطول مسار في الحل.

الحل:

نتبع نفس الإجراءات التي اتبعناها في المثال السابق (21 ـ 5)، ولكن الآن يجب إيجاد الأرباح المترتبة عن كل بدائل الشراء والتأجير والبيع، خلال الخمس سنوات القادمة (2002، 2003، 2004، 2005، 2006). إجراءات الحسابات المختلفة لهذه المشكلة مبينة في الجدول (24 ـ 5).

الأرباح الصافية المترتبة عن هذا الإجراء = الربح من التأجير ـ الخسارة المترتبة عن بيع الآلة

جدول (24 ـ 5)

شراء الآلة	بيع الآلة	العمليات الحسابية	الأرباح الصافية المترتبة عن هذا الإجراء
2002\1\1	2002\12\31	70-10% x 300 =	40ديناراً
2002\1\1	2002\12\31	(70 + 75) - 20% x 300 =	85 ديناراً
2002\1\1	2004\12\31	(70 + 75 + 85) - 30% x 300 =	140 ديناراً
2002\1\1	2005\12\31	(70 + 75 + 85 + 90) - 50% x 300 =	170 ديناراً
2002\1\1	2006\12\31	(70 + 75 + 85 + 90 + 110) - 70% x 300 =	220 ديناراً
2003\1\1	2003\12\31	70 - 10% x 330 =	37 ديناراً
2003\1\1	2004\12\31	(70 + 75) - 20% x 330 =	79 ديناراً
2003\1\1	2005\12\31	(70 + 75 + 85) - 30% x 330 =	131 ديناراً
2003\1\1	2006\12\31	(70 + 75 + 85 + 90) - 50% x 330 =	155 ديناراً
2004\1\1	2004\12\31	70 - 10% x 350 =	35 ديناراً
2004\1\1	2005\12\31	(70 + 75) - 20% x 350 =	75 ديناراً
2004\1\1	2006\12\31	(70 + 75 + 85) - 30% x 350	125 ديناراً

شراء الآلة	بيع الآلة	العمليات الحسابية	الأرباح الصافية المترتبة عن هذا الإجراء
2005\1\1	2005\12\31	70 - 10% x 370 =	33 ديناراً
2005\1\1	2006\12\31	(70 + 75) - 20% x 370 =	71 ديناراً
2006\1\1	2006\12\31	70 - 10% x 400 =	30 ديناراً

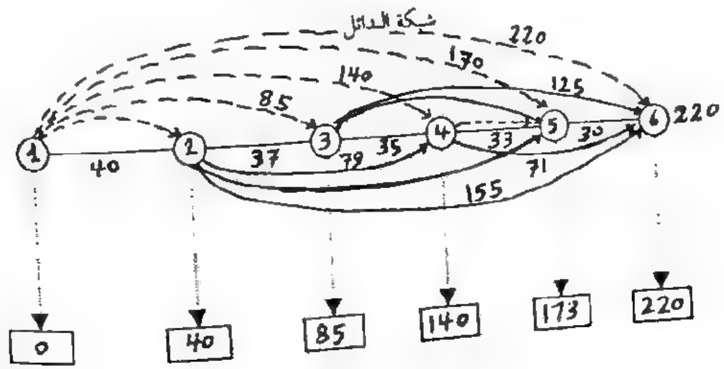
بعد حساب الأرباح، يمكن الآن تفريغ هذه البدائل المختلفة وتلخيصها في الجدول (25 ـ 5)

جدول (25 ـ 5)

السنوات	2002	2003	2004	2005	2006
2002	40	85	140	170	220
2003	–	37	79	131	155
2004	–	–	35	75	125
2005	–	–	–	33	71
2006	–	–	–	–	30

من خلال الجدول (25 ـ 5)، الآن يمكن رسم الشبكة البيانية الممثلة لهذه البدائل.

شكل (26 ـ 5) شبكة البدائل



من خلال الشكل (26 ـ 5)، نجد أن أطول مسار هو المسار (1 ـ 5)، وهذا المسار يعني أن المصنع الذي يفكر في شراء هذه الآلة يجب أن يشتريها في 1/1/2002، ويؤجرها لمدة خمس سنوات متتالية، ثم يبيعها في 31/12/2006، وهذه الخطة تحقق أكبر عائد ممكن، وهو 220 ديناراً.

أسئلة وتمارين Questions and Exercises:

أسئلة:

س1 ـ عرف تحليل الشبكات. وما هي مزاياها عند تطبيقها في عملية التحليل؟

س2 ـ ما هي القواعد والشروط الأساسية التي يجب مراعاتها عند بناء شبكة المشروع؟

س3 ـ تحدث واشرح وعرف كل ما أمكن ذلك وباستخدام الأسلوب العلمي:

أ ـ النشاط.

ب ـ النشاط الوهمي.

جـ ـ الحدث.

د ـ الشبكة البيانية.

س4 ـ حدد الخطوات الأساسية التي يجب اتباعها لتحديد المسار الحرج على شبكة المشروع.

س5 ـ أكتب مذكرات مختصرة عن الطرق التالية:

أ ـ طريقة بيرت أو أسلوب وتقييم ومراجعة البرامج (PERT).

ب ـ طريقة المسار الحرج (CPU)

س6 ـ تحدث واشرح عن نموذج أطول وأقصر مسار. وما هو الفرق بينهما؟

تمارين Exercises:

س1 ـ يتطلب مشروع لإتمام تنفيذه سبعة أنشطة وذلك بالترتيب التالي: (جـ تلي أ)، (هـ تلي ب)، (و تلي جـ)، (ع تلي هـ، د) وقد كانت المعلومات المتعلقة بالفترة الزمنية والقوة العاملة التي يحتاجها كل نشاط مبينة كالآتي:

الأنشطة	أ	ب	جـ	د	هـ	و	ع
الزمن/ شهر	2	5	3	2	4	1	3
عدد العاملين	2	3	1	1	2	4	2

المطلوب: بناء الشبكة البيانية للمشروع وتحديد المسار الحرج ثم تحديد جدول

الموارد وحساب الوقت الفائض: ما هو أكبر وأقل عدد من العاملين يجب توافرهم لإتمام المشروع ككل؟

س2 ـ مشروع صغير مكون من سبعة أنشطة فكر فيه القائمون على تخطيطه باستخدام أسلوب «بيرت»، وكانت البيانات كالآتي:

الحدث	الوقت المتفائل	الوقت الأكثر احتمالاً	الوقت المتشائم
2 ـ 1	1	1	7
3 ـ 1	1	4	7
4 ـ 1	2	2	8
5 ـ 2	1	1	1
5 ـ 3	2	5	14
6 ـ 4	3	6	8
6 ـ 5	3	6	15

المطلوب:

1 ـ بناء شبكة المشروع.

2 ـ حدد المسار الحرج وأوجد الزمن الذي يستغرقه المشروع.

3 ـ إحسب التشتت والانحراف المعياري الكلي للمشروع.

س3 ـ يتطلب مشروع لإنتاج أجهزة الحاسب الآلي القيام بالنشاطات الآتية:

النشاط	الوصف	الزمن اللازم بالأشهر	الأنشطة السابقة
A	دراسة الجدوى الاقتصادية	4	ـ
B	وضع التصاميم الهندسية والأشكال المظهرية	3	A
C	شراء المكائن	4	A
D	توفير الأيدي العاملة	8	B, C
E	تنظيم خطوط الإنتاج	4	C
F	تدريب الفنيين	6	D
G	توفير المستلزمات الثانوية للإنتاج	3	E
H	الإنتاج التجريبي والاستلام	7	G, F

المطلوب: 1 ـ بناء شبكة المشروع وتحديد المسار الحرج.

2 ـ تحديد الوقت المبكر والمتأخر للشبكة.

3 ـ تحديد الوقت الفائض لكل الأنشطة.

الفصل السادس

نماذج المخزون

Inventory Models

المقدمة Introduction:

مراقبة المخزون من أهم المشاكل التي تواجه الإدارة الحديثة في كل المشروعات الإنتاجية أو في مجال الخدمات، وكل إدارة من إدارات المشروعات تنظر إليه من وجهة نظر مختلفة. وكذلك نجد أن مفهوم كلمة مخزون لها معانٍ أو تفسيرات مختلفة، فالبعض يعني بأن المخزون هو عبارة عن المواد الأولية فقط التي تدخل في العمليات الصناعية لإنتاج سلعة معينة، ولكن في الواقع أن كلمة المخزون تعني أكثر من ذلك؛ فهي تعني المواد الأولية والسلع نصف المصنعة، والسلع التامة الصنع، وقطع الغيار. وكذلك نجد بأن المخزون لا يقترن فقط بالمشروعات الصناعية والتجارية، بل هو موجود أيضاً في المشروعات الخدمية، مثل الجامعات والفنادق والمستشفيات التي نجد عادة أنها تحتفظ بنسبة عالية من المخزون السلعي لكي تخدم بها الزبائن.

فنجد مثلاً أن إدارة المبيعات، تعمل على زيادة المخزون حيث يعمل لها كصمام أمن ضد تأخير توريد طلبات العملاء، ولمقابلة أية زيادة في الطلب. بينما نجد إدارة المشتريات تعمل على زيادة المخزون حيث يعمل لها كضمان ضد تقلب الأسعار ويساعدها على الحصول على خصم الكمية والشراء بشروط أحسن. وإدارة العمليات الإنتاجية، تعمل على زيادة المخزون حتى يكون هناك ضمان دائم ضد اختفاء المواد من الأسواق وعدم تعطل الماكينات. وأخيراً نجد أن الإدارة المالية تقف ضد الإدارات السابقة؛ فهي تعمل على الحد من المخزون لأقصى حد ممكن لأنها تعتبر المخزون كجزء من رأس المال في المخازن مما يعطل دورة رأس المال العامل. فالمشروع يواجه مشكلتين الأولى تتمثل في طلب كميات كبيرة لتخفيض تكاليف الطلب، والثانية تتمثل في طلب كميات صغيرة لتخفيض تكاليف التخزين. وأي من هاتين المشكلتين سيكون له أثره السيء على الأرباح، والاتجاه الأمثل هو الحل الوسط بين هاتين المشكلتين.

وبناء على ما سبق ذكره، نجد أن المخزون هو من أهم عناصر أو بنود الأصول المتداولة، ويعتبر المخزون (مواد أولية، أو تامة الصنع، قطع الغيار، الخ) من الأصول المتداولة التي ينفق عليها المشروع أموالاً ضخمة، وفي كثير من السياسات وجد أن ما ينفق على السلع يفوق 40% من مجموع تكاليف الإنتاج. ونتيجة لكل ذلك يجب أن تعالج مشكلة المخزون باستخدام أساليب علمية ولا تترك للتقدير الشخصي لرؤساء الإدارات. ولقد ساهمت العديد من العلوم في حل المشاكل المتعلقة بالمخزون ومن بينها علم بحوث العمليات، التي بدورها وفرت العديد من الطرق الإحصائية والنماذج الرياضية وذلك للوصول إلى الحلول المثلى لمشاكل المخزون.

إن أي نظام إنتاج في أي مشروع صناعي أو إنتاجي يتكون من ثلاثة عناصر أساسية تتمثل في الآتي:

1 - **المدخلات** (INPUTS) التي تأخذ عادة شكل المواد في الإنتاج بكل صورها، مواد خام، مواد نصف مصنعة، مواد جاهزة للتجميع بالإضافة إلى القوى العاملة والمعدات والمعلومات.

2 - **العمليات** (Transformations) التي تقوم بها إدارة العمليات الإنتاجية من أجل تحويل المدخلات إلى مخرجات.

3 - **المخرجات** (Outputs) وهي نتاج عملية معالجة المدخلات وتكون سلعاً أو خدمات.

إن أي إدارة صناعية كفوءة تعمل على تحقيق أهداف العجلة الإنتاجية بأقل تكلفة ممكنة. ونجد أن الجزء الأكبر من هذه التكاليف يكمن في المدخلات وأنها تساهم مساهمة واضحة في التأثير على التكلفة النهائية. ومن هذا المنطلق برزت أهمية وضع نظام رقابي على عناصر المدخلات وتكلفتها وأن تخفيض هذه التكاليف سوف يساهم في تحسين ربحية المشروع. إلا أن بعض الصناعات تعاني من ارتفاع نسبة تكلفة المواد الداخلة في الإنتاج نظراً لتنوع مصادر هذه المواد؛ ففي بعض المشروعات نجد أن المواد الداخلة في عملية الإنتاج تنقسم إلى قسمين:

1 - مواد مستوردة من الخارج وترتفع تكلفة هذه المواد.

2 - مواد محلية تكلفتها منخفضة مقارنة بالمواد المستوردة بالإضافة إلى ارتفاع نسبة المواد الداخلة في عملية الإنتاج بهذه المشروعات تتطلب الاحتفاظ بنسبة معينة من مستلزمات الإنتاج، وخاصة من المواد المستوردة. إلا أن نسبة الاحتفاظ عادة ما تكون عالية بالنسبة إلى قيمة الإنتاج خاصة أن هذه المشروعات تعتمد سياسة الاحتفاظ بجزء من احتياجات العملية الإنتاجية كمستلزمات إنتاج.

وقد أدت هذه السياسة الدائمة إلى ارتفاع تكاليف المدخلات وأن هذه السياسة

الدائمة أدت إلى ارتفاع مستويات المخزون وأصبحت تكلفة التخزين المتغيرة تمثل نسبة لا يستهان بها في رأس المال المستثمر في المخزون. إضافة إلى ارتفاع التكاليف الثابتة كنتيجة لارتفاع مستويات المخزون. ومن بين هذه المشاكل التي تعاني منها هذه المشروعات والمتمثلة في الآتي:

1 - وجود تراكم في المخزون من المواد اللازمة للإنتاج.

2 - وجود حالات نقص في بعض أنواع المواد اللازمة للإنتاج.

طبيعة المخزون وأنواعه Natural and Types of Inventory:

تقتضي طبيعة الصناعة أو الإنتاج في مختلف المشروعات سواء كانت عامة أو خاصة، كبيرة أو صغيرة، متخصصة أو متنوعة الأنشطة، ضرورة القيام بتخزين كميات من الأجزاء والمواد والمهمات والأدوات وخلافه ولو لفترة وجيزة. وذلك بهدف مواجهة مقتضيات وظروف الإنتاج المتغيرة والتي تتسم بالحركة وفقاً لمتغيرات ومؤثرات البيئة الداخلية والخارجية للمشروع. ولهذا لا يمكن أن نتوقع انتظام واستقرار عمليات الشراء والتوريد والنقل بالكمية والنوعية المناسبة وفي الوقت المناسب والذي يمد جهات الاستخدام بحاجاتها لتحقيق برامجها المخططة. وهو ما يعني بدوره صعوبة الالتزام بتلبية احتياجات ومتطلبات عمليات الإنتاج أو الأفراد أو العملاء وبالتالي التأثير على استمرار المشروع ونتائج أعماله وربحيته ونجاحه. ولعل هذا ما يبرر ضرورة الاهتمام بوظيفة التخزين.

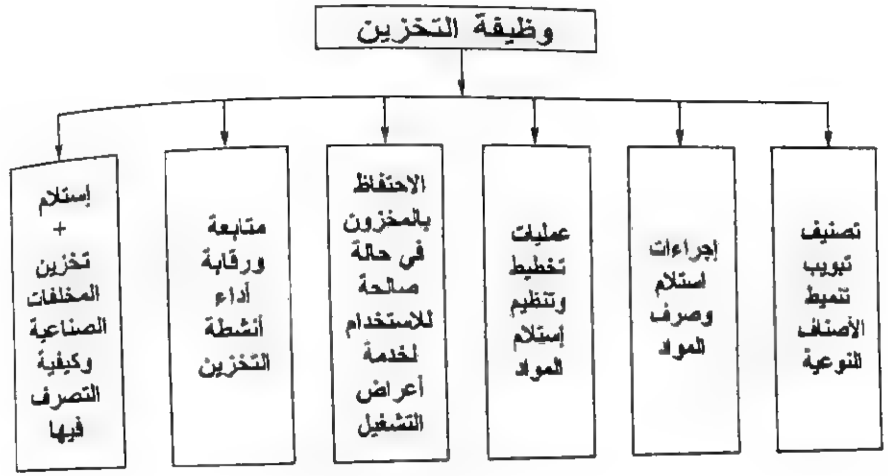
أهمية المخزون ودواعي الاحتفاظ به Importance of Inventory and the Reasons of Storage:

أولاً - المقصود بوظيفة التخزين:

ترتبط وظيفة التخزين ارتباطاً كاملاً بوظيفة الشراء، فنجد أن كل وظيفة تكمل الأخرى؛ حيث تعتبر وظيفة التخزين مرحلة لا يمكن إغفال أهميتها في توفير وتدبير المواد والسلع اللازمة لاحتياجات العمل والإنتاج بالمشروع. وللتخزين أسسه العلمية وفي نفس الوقت يعتبر عملية فنية تعمل على مواجهة الحاجات الفعلية لجهات الاستخدام بالموجودات في المخازن وإحكام الرقابة على استخدام هذه الموجودات.

وتعتبر وظيفة التخزين وظيفة جوهرية تتعلق باستلام المواد والأصناف المختلفة ثم تصنيف وتبويب وتنميط هذه الأصناف، يلي ذلك عمليات الصرف وفقاً لإجراءات تتفق وأهداف وطبيعة تنظيم المشروع مع تخطيط وتنظيم عمليات استلام المواد والمستلزمات والاحتفاظ بالمخزون في حالة صالحة للاستخدام بما يخدم الوظائف الإنتاجية ويحقق نوعاً

من التوازن بين الاحتياجات التشغيلية وبين معدلات تدفق مختلف أنواع الخامات والمعدات والأجزاء أو المستلزمات اللازمة لعمليات الإنتاج، بجانب المتابعة والرقابة على الأداء بما يحقق كفاءة الأداء وتخفيض التكاليف. كما تمتد وظيفة التخزين لتشمل استلام وتخزين المتخلفات الصناعية وكيفية التصرف فيها. الجدول (1 ـ 6) يبين أهداف وظيفة التخزين.



جدول (1 ـ 6) أهداف وظيفة التخزين

ثانياً ـ مفهوم التخزين Inventory Concept:

لقد قام العديد من المتخصصين في علم الإدارة والمحاسبة بتعريف المخزون؛ فرأى البعض أن المخزون يعبر عن أية كمية من المواد (خامات أو أجزاء أو منتجات تحت التشغيل أو منتجات تامة) تحت سيطرة مشروع ما يحتفظ بها لفترة زمنية معينة في حالة ساكنة نسبياً انتظاراً لاستخدام أو بيعها. ويوضح هذا التعريف أن فكرة الاحتفاظ بالمخزون تعتبر انعكاساً لحالة سكون بين نشاط سابق ونشاط لاحق يمثل أولهما عملية تموين والأخرى عملية طلب على المواد، ولا يظهر المخزون إلا إذا زاد مجموع عمليات التموين عن مجموع عمليات الطلب حيث تعتبر معدلات التموين بمثابة مدخلات نظام المخزون، أما معدلات الطلب فتعبر عن مخرجات هذا النظام.

وهناك من عرف المخزون بأنه مجموعة من المواد والأجزاء المكملة الأخرى للمنتج النهائي والتي تتضمن المجاميع شبه النهائية للوحدات المصنعة والمخزون والتي تنتظر تجميعها مع وحدات أخرى لكي نحصل على وحدة نهائية. ويتضح من هذا التعريف أنه

تم التركيز على المخزون الصناعي فقط أي الأجزاء التي تنتظر التجميع مع بعضها لإنتاج الوحدة النهائية، وتم إهمال الوحدات التامة الصنع والجاهزة للشحن أو البيع وكذلك مواد الصيانة والمهمات.

كما تم تعريف المخزون على أنه البضائع والمواد التي يمتلكها المشروع بغرض إعادة بيعها أو لاستخدامها في صنع منتجات للبيع، وهناك من يرى أن كلمة المخزون تمثل مجموع العناصر الملموسة والمملوكة للوحدة الاقتصادية التي تكون في شكل:

1 ـ بضاعة معدة للبيع خلال النشاط العادي للمشروع.

2 ـ مواد ومنتجات تحت التشغيل ما زالت في مرحلة الإنتاج حتى تصبح معدة للبيع.

3 ـ مواد ومهمات تستهلك مباشرة في العملية الصناعية.

ويرى البعض أن المخزون مصطلح يتم التعبير به عن البضائع والسلع التي يمتلكها المشروع أو المعدة للبيع أثناء الأعمال الطبيعية للمشروع. بالإضافة إلى المواد تحت التشغيل في عمليات الإنتاج أو التي يحتفظ بها لمثل هذه الغاية، وهناك من يرى أن كلمة مخزون تعني المواد الأولية والسلع نصف المصنعة والسلع التامة الصنع وقطع الغيار. كما أن المخزون لا يقترن بالمشروعات الصناعية والتجارية فقط، بل هو موجود أيضاً في المشروعات الخدمية، مثل الجامعات والمستشفيات التي عادة ما تحتفظ بكثير من السلع لتقدم بها الخدمة لزبائنها.

ويتضح من التعريفات المختلفة السابقة، عدم وجود اتفاق تام بين الباحثين على تعريف موحد متفق عليه، لأن كلاً منهم ينظر إلى المخزون من زاوية معينة. إلا أن هناك بعض الأساسيات التي كانت مشتركة في أغلب التعريفات وهي:

1 ـ المخزون شيء مادي ملموس له قيمة.

2 ـ يحتفظ المشروع بالمخزون ولو لفترة قصيرة.

3 ـ تكون ملكية المخزون للمشروع وله سيطرة عليه.

4 ـ يختلف المخزون وطبيعته وفقاً لنوع النشاط الذي يزاوله المشروع.

من خلال النقاط السابقة يمكن القول بأن المخزون يمثل جميع العناصر المادية والتي تكون في شكل:

1 ـ مواد أولية تدخل في عملية الإنتاج.

2 ـ أجزاء أو سلع نصف مصنعة تدخل في الإنتاج أو تكون جاهزة للبيع.

3 ـ المنتجات التامة الصنع والتي تكون جاهزة للتصرف فيها.

4 ـ المادة المستعملة في عمليات الصيانة والتي تكون مملوكة ملكية تامة للمشروع

ويحتفظ المشروع بها لفترة زمنية معينة انتظاراً لحين الحاجة إليها.

وحيث إن المخزون يمثل نسبة عالية من إجمالي حجم الأموال المستثمرة في المشروع، الأمر الذي يوضح الأهمية العالية لهذا العنصر.

ثالثاً ـ أهمية المخزون:

تحتفظ مشروعات الأعمال بمواد مختلفة تساعدها في استمرار العملية الإنتاجية بلا توقف حسب برامجها الإنتاجية المخطط لها، الأمر الذي يستدعي وجود مخزون. وتظهر أهمية هذا المخزون في كونه يمثل حلقة الوصل بين طلبات العملاء ومنتجات المشروع، كما تظهر أهمية المخزون في كونه يمثل أهم الأصول في أغلب المشروعات حيث يكون الجزء الأكبر من الأصول المتداولة وأيضاً مجموع الأصول، كما يحقق المخزون مجموعة من المنافع للمشروع يمكنه من المنافسة بجانب تحقيق معدلات ملموسة من النمو والاستقرار والنجاح نظراً لتوفيرها لمختلف الاحتياجات والمتطلبات من المواد والمهمات والأجزاء والأدوات وغيرها وفقاً لمعدلات الاستخدام. ويمكن بيان أهمية المخزون في النقاط التالية:

1 ـ يمثل المخزون نسبة مرتفعة من إجمالي حجم الأموال المستثمرة في المشروع قد تصل في المشروعات الصناعية إلى ما يزيد عن 50% وفي المشروعات التجارية يتراوح ما بين 52% إلى 75% من إجمالي حجم رؤوس الأموال المتاحة.

2 ـ نظراً للحجم الكبير الذي يمثله المخزون من إجمالي حجم الأموال المستثمرة، فإنه يؤثر على اقتصاديات المشروع حيث تمثل تكلفة الاحتفاظ بالمخزون نسباً مرتفعة لا يستهان بها.

3 ـ تستطيع مختلف الإدارات بالمشروع القيام بأعمالها ورسم خططها ووضع برامجها عندما تتوفر سياسة تخزينية واضحة وسليمة ومعدة على أسس علمية، حيث يعمل نشاط التخزين على تحقيق التنسيق والتكامل بين مختلف إدارات المشروع.

4 ـ عندما تكون هناك سياسة واضحة للمخزون مبنية على أسس علمية فإن هذا من شأنه تخفيض حجم الاستثمارات في موجودات المخازن إلى الحد الذي يسمح باستمرار العملية الإنتاجية، ولا يكون هناك فائض في المخزون أي تحقيق التوازن بين متطلبات العملية الإنتاجية وبين ما هو موجود بالمخازن.

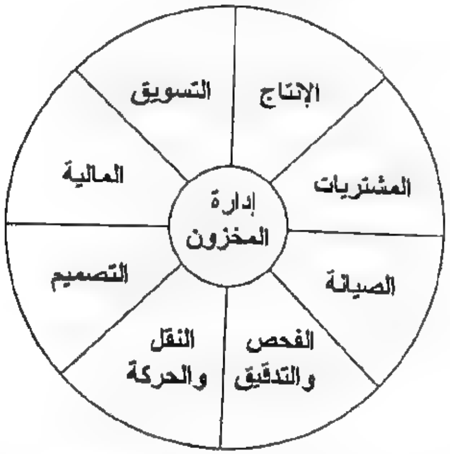
5 ـ نظراً لارتباط إدارة المخزون بمختلف الإدارات الأخرى الموجودة في نفس المشروع، فإن حجم المخزون وارتفاع تكاليف الاحتفاظ به يؤثر على إجمالي التكاليف الكلية للإنتاج، وبالتالي، على تكلفة السلع المزمع تسويقها لعملاء المشروع وبالتأكيد على أسعارها النهائية، الأمر الذي يؤثر على استمرار الاحتفاظ بعملاء المشروع وقطاعاته التسويقية.

6 ـ تعتبر الموسمية سبباً للتخزين، فبعض احتياجات المشروع تتوفر في موسم معين (مثلاً المواد الزراعية) بينما يجري استخدامها في الإنتاج طوال العام الأمر الذي يتطلب تخزين احتياجات الإنتاج طوال العام. ومن ناحية أخرى قد يتم الإنتاج خلال فترة معينة أو موسم معين بينما يحتاج السوق إلى هذه المنتجات طوال العام مما يستدعي تخزين هذه المنتجات طوال العام لإمداد السوق باحتياجاته.

7 ـ نظراً لأن المخزون أقل الأصول سيولة فإن الأخطاء المتعلقة بإدارته لا يمكن معالجتها بسرعة، وسوء الإدارة إذا زاد عن حده في هذا المجال فقد يؤدي ذلك إلى نهاية المشروع.

8 ـ يحقق المخزون عامل الأمان بالنسبة لاستمرار عجلة الإنتاج بالمشروع في الدوران، حيث يكفل المخزون أرصدة المواد والسلع والمهمات وقطع الغيار التي تحقق هذا الأمان.

9 ـ تزداد الأهمية النسبية في بعض المشروعات لسلع معينة تعتبر رئيسية وتدخل في معظم العمليات الإنتاجية، مثل الإسمنت في شركات المقاولات. لذا، فإن الأهمية النسبية لهذا العنصر تبين لنا أهمية إدارة المخزون. الجدول (2 ـ 6) يبين علاقة إدارة المخزون بباقي الإدارات الأخرى بالمشروع.



جدول (2 ـ 6) علاقة إدارة المخزون بباقي الإدارات الأخرى بالمشروع

رابعاً ـ دواعي الاحتفاظ بالمخزون Reasons of Keeping Inventory:

المخزون يختلف من مشروع إلى آخر وذلك وفقاً لنوع النشاط الذي يقوم به المشروع، وتختلف الأسباب التي تستدعي وجوده والاحتفاظ به. فنجد مثلاً أن التخزين

مثال (1):

نفرض أن هناك مشروعين (ش1، ش2) يتنافسان في سوق منتجات معين حيث يعرض كل منهما ثلاثة منتجات في السوق، وحيث تعتبر منتجات كل من المشروعين بدائل كاملة لمنتجات الآخر. ونفرض أن المشروع الأول (ش1)، نتيجة دراسة مستفيضة للسوق والتغير في أذواق المستهلكين، وجد أنه يستطيع تقديم منتج رابع متطور يمكن أن يؤدي إلى زيادة نصيبه من السوق بمقدار 10% من الحجم الكلي للسوق، إذا لم يقم المشروع الثاني (ش2) بتصرف مضاد. أما إذا قام المشروع الثاني (ش2) بتقديم منتج جديد هو الآخر، فإن الزيادة في نصيب المشروع الأول (ش1) من السوق بتقديم منتجه سوف تقتصر على 4% فقط. في حين أنه إذا قام المشروع الثاني (ش2) بتقديم منتج جديد بينما لم يقم المشروع الأول بتقديم منتجه فإن المشروع الأول يخسر 6% من نصيبه الحالي في السوق.

المطلوب:

1 ـ ما هي الاستراتيجية المفضلة والتي يجب على المشروع الأول (ش1) اتباعها في ظل هذه الظروف؟

2 ـ ما هي استراتيجية المشروع الأول (ش1) المثلى لمقابلة نوايا المشروع الثاني (ش2) حتى تتصف إدارته بالرشد الاقتصادي والحصافة الإدارية؟

الحل:

يمكن أن نلخص البيانات الموجودة في المثال (1) في شكل ما يسمى بمصفوفة عائد المباريات Pay - off Matrix كالآتي:

جدول (1 ـ 8)

مصفوفة عائد المباراة

ش 2

ش 1		استراتيجية X	استراتيجية Y
ش 1	استراتيجية I	%4	% 10
	استراتيجية II	%6	%0

من خلال هذا الجدول يتبين أن المشروع الأول (ش1) أمام خيارين أو استراتيجيتين، إما أن يقدم المنتج الجديد أو أن لا يتقدم بهذا المنتج في السوق. ولنرمز للاستراتيجية الأولى (I) وللاستراتيجية الثانية (II). وفي المقابل يصبح أمام المشروع الثاني استراتيجيتان، إما أن يتقدم بمنتج جديد، أو لا يتقدم بهذا المنتج. ولنرمز للاستراتيجية الأولى بالرمز (X) وللاستراتيجية الثانية بالرمز (Y).

التعليق:

يمثل كل عنصر في المصفوفة العائد على أحد المشروعين والذي بالضرورة يمثل خسارة للمشروع الآخر. فزيادة نصيب (ش1) بمعدل 4% في الصف الأول والعمود الأول يعني من وجهة نظر (ش2) نقصاً في نصيبه بنفس النسبة، بينما نصيب (ش1) بمعدل 6% في الصف الثاني والعمود الأول هو من وجهة نظر (ش2) زيادة في نصيبه بنفس المعدل.

ومن الواضح أنه إذا كانت إدارة (ش1) رشيدة في ظل هذه الظروف فإنه سوف تختار وبالضرورة البديل (I)، وذلك لأنه في كل الأحوال سوف تحصل على زيادة إضافية في نصيبها من السوق أدناه 4% وأقصاه 10%، وبالتالي فأقل ما يمكن أن تحصل عليه من مكاسب بهذا البديل هو إضافة 4% إلى نصيبها من السوق. أما البديل الثاني، فأقصى ما يمكن أن تضيفه إلى نصيبها من السوق فيه هو صفر بينما أدنى ما يمكن أن تتحصل عليه هو فقدان 6% من نصيبها الحالي. ذلك إذا اختارت (ش2) البديل (X).

غير أنه طبقاً لافتراضات نظرية المباريات، إذا كان (ش1) رشيداً فلا يجوز افتراض أن (ش2) أقل منه رشداً. وهو لو اختار (X) فإن أقصى ما يمكن أن يفقده من السوق هو 4% بينما قد تتاح له الفرصة في إضافة 6% من نصيبه الحالي. أما إذا اختار (Y) فأقصى ما يمكن أن يفقده من السوق 10%، بينما أفضل ما يمكن أن يتحقق له بهذا البديل هو الاحتفاظ بنصيبه الحالي، وذلك بشرط اختيار (ش1) للبديل (II). ومن الواضح أيضاً في ظل هذه الظروف أنه يصبح من المتعين على (ش2) أن يختار البديل (X) ليقلل خسائره من حصة السوق إلى أقل ما يمكن.

ويعني ذلك أن فرص اختيار (ش1) بين البديلين أصبح مركزاً على البديل (I) بنسبة 100%، أو باحتمال واحد صحيح، بينما فرصة اختيار (II) بالنسبة للمشروع (ش1) أصبح احتماله مساوياً للصفر. فالمشروع (ش 1) سوف يختار (I) بصفة مطلقة منطقياً، ويقلا في هذه الحالة إن المشروع (ش 1) يتبع استراتيجية صرفة هي (1، صفراً)، أي أن احتمال اختيار أحد البديلين هو واحد صحيح واحتمال اختيار البديل الآخر هو الصفر.

كذلك الأمر بالنسبة للمشروع (ش2). فهو سوف يختار هو الآخر (X) بصفة مطلقة، أي أنه مضطر أن يتبع الاستراتيجية الصرفة (1، صفراً) للإقلال من النسبة التي يفقدها من السوق للمشروع (ش1) إلى أقل ما يمكن.

وبالتالي فمن الواضح أن الاستراتيجية الصرفة لمتنافس معين تعني اختياره لأحد البدائل بصفة مطلقة دون البدائل الأخرى، أو أن احتمال اختيار هذا البديل يصبح مساوياً للوحدة، بينما اختيار البدائل الأخرى احتمالها مساوية للصفر. وبالتبعية تكون الاستراتيجية مختلطة إذا كان احتمال اختيار أكثر من بديل يزيد عن الصفر. مثال ذلك الاستراتيجيات

(نصف، نصف)، (ثلاثة أرباع، ربع)، (سدس، خمسة أسداس)، (ثلث، ثلثان)، (صفر)، وهكذا.

قانون أدنى الأقصيات وأقصى الأدنيات وقيمة المباراة:

حيث تعتبر مكاسب أحد المتنافسين في المباريات صفرية الحصيلة بالضرورة معادلة ومماثلة لخسائر المتنافس الآخر، فإننا نستطيع التوصل إلى الاستراتيجيات المثلى لكل من المتنافسين بتطبيق قانون أدنى الأقصيات وأقصى الأدنيات. نلاحظ في مثالنا السابق عندما يطبق المشروعان مبدأ الحيطة والحذر، أن أقل ما يتحقق من مكاسب للمشروع (ش1) بالبديل الأول (I) هو إضافة 4% لنصيبه من السوق، بينما أقل ما يتحقق له بالبديل (II) هو فقدان (ـ 6%) من نصيبه من السوق. وهو إذا اتبع مبدأ الحيطة والحذر في تقييم مكاسب كل من البديلين، فهو يختار البديل الذي يحقق أقصى أدنيات المكاسب، أي الأقصى بين (+ 4% و ـ 6%، وهو + 4%).

وحيث مكاسب (ش1) خسائر (ش2)، فإن (ش2) ينظر للأمر بنظرة عكسية. فهو يقيم البدائل على أساس حساب أقصى ما يمكن أن يتحقق له من خسائر عن كل منها، ثم يعمل على تقليل خسائره بعد ذلك إلى أقل ما يمكن. وهو لو اختار البديل الأول لكان أقصى خسائر يمنى بها هو فقدان 4% من نصيبه من السوق، بينما لو اختار البديل الثاني لكان أقصى الخسائر هو فقدان 10% من هذا النصيب. وبذلك فهو يختار البديل الذي يحقق له أدنى أقصيات الخسائر، أي البديل الأول الذي يحقق له خسائر قدرها 4%. والجدول (2 ـ 8) يبين ذلك:

جدول (2 ـ 8)

ش2

ش 1		استراتيجية Y	استراتيجية X	أدنى مكاسب ش 1
	استراتيجية I	%10	%4	4
	استراتيجية II	0	ـ %6	ـ 6
	أقصى خسائر ش 2	10	4	

يتضح من الجدول (2 ـ 9) أن المشروعين يكونان في حالة توازن عند تلاقي (I) مع (X)، حيث تكون أقصى أدنيات مكاسب (ش1) معادلة لأدنى أقصيات خسائر (ش2)، أي عندما يحصل (ش1) على 4% زيادة في نصيبه من السوق بتقديم المنتج الجديد ويفقد (ش2) 4% من نصيبه بتقديم منتج جديد في مواجهة (ش1). لاحظ أنه إذا لم يقم (ش2) بتقديم المنتج فإنه يخسر 10% من نصيبه من السوق، وهو بتقديم المنتج يقلل الخسائر

إلى 4% بدلاً من 10%. ويبلغ عائد المباراة من وجهة نظر (ش1) 4% بينما يبلغ من وجهة نظر (ش2) ـ 4% لتكون الحصيلة الكلية مساوية للصفر. غير أنه يقال إن قيمة المباراة = 4% من وجهة نظر المستفيد منه.

وفي ما يلي عدد من الأمثلة تبين كيفية إيجاد نقطة التوازن:

مثال (2):

ص

س	ل	ك
م	س يكسب أربع نقاط	س يكسب نقطتين
ن	ص يكسب ثلاث نقاط	س يكسب نقطة واحدة

→

ص

س		
	4	2
	ـ3	1

مثال (3)

ص

س	هـ	ل	ك
م	س يكسب أربع نقاط	لا يكسب أحد من اللاعبين	س يكسب نقطتين
ن	س يكسب 2 نقطة	ص يكسب ثلاث نقاط	س يكسب نقطة واحدة

→

ص

س			
	4	0	2
	2	ـ3	1

ص

مثال (4)

س	ل	ك
م	ص يكسب 3 نقاط	س يكسب نقطة واحدة
ن	س يكسب أربع نقاط	س يكسب نقطتين
ع	س يكسب 5 نقاط	ص يكسب نقطة واحدة

→

ص

س		
	ـ3	1
	4	2
	5	ـ1

مثال (5)

		ص		
		هـ	ل	ك
س	م	ص يكسب 2 نقطة	س يكسب 2 نقطة	س يكسب 3 نقاط
	ن	ص يكسب 4 نقاط	ص يكسب ثلاث نقط	س يكسب نقطة واحدة
	ع	ص يكسب 3 نقاط	س يكسب نقطة واحدة	لا يكسب أحد من اللاعبين

$$\longrightarrow \quad س \begin{array}{c} ص \\ \left|\begin{array}{ccc} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right| \end{array}$$

مثال (6)

		ص	
		ل	ك
س	م	ص يكسب 3 نقاط	س يكسب نقطة واحدة
	ن	لا يكسب أحد من اللاعبين	س يكسب 4 نقاط
	ع	ص يكسب نقطة واحدة نقاط	س يكسب 3 نقاط

$$\longrightarrow \quad س \begin{array}{c} ص \\ \left|\begin{array}{cc} 1 & -3 \\ 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{array}\right| \end{array}$$

دالة العائد والاستراتيجيات المثلى:

يطلق على الاستراتيجية التي تحقق أقصى عائد للمباراة من وجهة نظر المستفيد منها الاستراتيجية المثلى، كما يطلق على الاستراتيجية التي تحقق أدنى تضحيات من وجهة نظر المتضرر من المباراة الاستراتيجية المثلى أيضاً. والاستراتيجية المثلى هي تلك التي تؤدي إلى تقصية دالة العائد إلى أكبر ما يمكن في حالة المستفيد، وإلى تدنية دالة العائد إلى أقل ما يمكن في حالة المتضرر.

والاستراتيجية في حقيقة الأمر ما هي إلا التوزيع الاحتمالي لإقرار البدائل. وتكون الاستراتيجية مثلى إذا أمكن تحديد هذا التوزيع الاحتمالي بطريقة تؤدي إلى تحقيق الهدف المرغوب بأفضل صورة ممكنة إذا تم إقرار البدائل على أساس هذا التوزيع. يمكن توضيح ذلك عن طريق المثال (1) التالي:

ش2

	استراتيجية X (H)	استراتيجية Y (1 - H)
ش 1 استراتيجية I (P)	%4	% 10
استراتيجية II (1 - P)	-%6	0

الاحتمالات

المطلوب: ما هي دالة العائد والاستراتيجيات المثلى لهذين المشروعين؟

الحل:

نرمز لاحتمال اختيار البديل الأول بالنسبة للمشروع (ش1) = P

نرمز لاحتمال اختيار البديل الثاني بالنسبة للمشروع (ش1) = (1 - P) لأن مجموع الاحتمالات = 1

نرمز لاحتمال اختيار البديل الأول بالنسبة للمشروع (ش2) = H

نرمز لاحتمال اختيار البديل الثاني بالنسبة للمشروع (ش2) = (1 - H)

ونفرض أن عائد المباراة بالنسبة للمشروع (ش1) هو Z =

$$Z = P[4(H) + 10(1 - H)] + (1 - P)[-6(H) + 0(1 - H)]$$

$$Z = 4PH + 10P - 10PH - 6H + 6PH$$

$$Z = 10P - 6H$$

ونجد من المعادلة ($Z = 10P - 6H$) أن المشروع (ش1) يتحكم في قيمة P بينما المشروع (ش2) يتحكم في قيمة H. ولا شك في أن (ش1) ترغب في جعل قيمة P أكبر ما يمكن حتى تكون Z أكبر ما يمكن. بينما المشروع (ش2) يرغب في جعل قيمة H أكبر ما يمكن لجعل قيمة Z أقل ما يمكن (أرباح ش1) خسائر للمشروع (ش2)، ذلك لأن معامل H في المعادلة السابقة مقدار سالب. وحيث إن:

$$0 \leqslant P \leqslant 1$$

$$0 \leqslant H \leqslant 1$$

فإن $P = 1$، $H = 1$ تحقق غرض المشروعين. وبالتالي تكون استراتيجية (ش1) هي (1، صفراً) واستراتيجية (ش2) هي (1، صفراً) وكلاهما استراتيجيات صرفة.

ويطلق على المباراة التي تكون الاستراتيجيات المثلى للمتنافسين فيها استراتيجيات صرفة، مباراة محددة تحديداً كاملاً Strictly Determined.

وليس من الضروري بالطبع أن تكون الاستراتيجيات المثلى استراتيجيات صرفة. فلو افترضنا مثلاً أن مصفوفة العائد بين (ش1)، (ش2) كانت كما في المثال (1):

	ش2 استراتيجية X	استراتيجية Y	أدنى مكاسب ش 1
ش 1 استراتيجية I	2	-4	-4
استراتيجية II	-6	8	-6
أقصى خسائر ش 2	2	8	

من خلال الجدول السابق نجد أن أقصى أدنيات (ش1) (4 -) يختلف عن أدنى أقصيات (ش2) (2) وإذا رغبنا في تحديد عائد المباراة بالنسبة للمشروع (ش1) فإننا نجد أنه كالآتي:

$$Z = P[(2H) + (-4)(1 - H)] + (1 - P)[(-6)(H) + 8(1 - H)]$$

$$Z = 16PH - 8P - 10H + 4$$

$$Z = 16(PH - 8/16P - 10/16H) + 4$$

$$Z = 16[(P - 10/16)(H - 8/16)] - 5 + 4$$

$$-1\ Z = 16(P - 5/8)(H - \tfrac{1}{2})$$

وكما هو الحال في المثال السابق فإن (ش1) يتحكم في P بينما (ش2) يتحكم في H، ويرغب الأول في تقصية Z بينما يرغب الثاني في تدنيتها. ولنفرض أن (ش1) اختار P = 1، فسوف يكون من المنطقي في هذه الحالة أن يختار (ش2) H = 0 حتى تتفاقم خسائر (ش1) وتزداد قيمة Z السالبة بالنسبة للمشروع (ش1) (والموجبة بالنسبة للمشروع ش2) في المعادلة $Z = 16(P - 5/8)(H - 1/2) - 1$. وإذا اختار (ش2) أي قيمة للمتغير $H > \frac{1}{2}$ فإنه يصبح في صالح (ش1) اختيار أكبر قيمة ممكنة للمتغير P، أي جعل P = 1 حتى نحصل على أكبر قيمة موجبة للحد الأول في المعادلة $Z = 16(P - 5/8)(H - \frac{1}{2} - 1$. وبالتالي فعلى (ش2) أن تجعل $H \leqslant \frac{1}{2}$ حتى تضمن أن تكون محصلة هذا الحد سالبة أو صفراً.

إلا أن (ش1) لو وجد أن (ش2) اختيار قيمة $H < \frac{1}{2}$ فيصبح من المنطقي أن يختار هو الآخر قيمة P < 5/8 حتى يتحول الحد الأول من المعادلة $Z = 16(P - 5/8)(H - 1/2) - 1$ إلى مقدار موجب فتقل الخسائر التي يتحملها. ولكن لو اكتشف (ش2) ذلك لجعل قيمة $H < \frac{1}{2}$ لتتحول قيمة الحد إلى مقدار سالب. والواقع أن الاستراتيجية المثلى للمشروع (ش1) في ظل رشد وحصافة (ش2) تقتضي أن يجعل P = 5/8، وبالتالي الاستراتيجية المختلطة (3/8, 5/8)، كما أن الاستراتيجية المثلى للمشروع (ش2) في ظل

حصافة ورشد (ش1) تقتضي أن تجعل $H = \frac{1}{2}$، وبالتالي تتبع الاستراتيجية المختلطة (1/2، 1/2) لتكون قيمة المباراة محددة بخسارة قدرها 1% يتحملها (ش1) (وهي مكاسب تضاف لنصيب ش2).

تعدد البدائل أمام المتنافسين والبدائل المهيمنة (المسيطرة):

قد تتعدد البدائل أمام المتنافسين في المباراة ولا تكون الاستراتيجيات المثلى استراتيجيات صرفة حيث يتحقق التوازن بتعادل أدنى الأقصيات مع أقصى الأدنيات. **ويقتضي الأمر في ظل هذه الظروف أن يقوم كل متنافس بتحليل البدائل لاستبعاد غير الفعال منها والإبقاء على البدائل المهيمنة Dominant قبل البحث عن الاستراتيجية المثلى التي يجب اتباعها.** ويكون بديل ما مهيمناً على بديل أو بدائل أخرى من وجهة نظر متنافس معين إذا كان كل عنصر من عناصر متجه عائد هذا البديل في مصفوفة العائد يفوق على الأقل العنصر المماثل في متجه البديل أو البدائل الأخرى.

مثال (7):

جدول (3 - 8)

	ش2 استراتيجية X	استراتيجية Y	استراتيجية W	أدنى مكاسب ش 1
استراتيجية I	5	-6	9	-6
ش 1 استراتيجية II	-4	8	-4	-4
استراتيجية III	4	-7	8	-7
أقصى خسائر ش 2	5	8	9	

من خلال هذا الجدول (3 - 8) يتضح بأن البديل I يهيمن على البديل III من وجهة نظر (ش1) حيث:

$$5 > 4, -6 > -7, 9 > 8$$

وهذا يعني أنه إذا كان المشروع (ش1) له أن يختار بين البديلين فهو دائماً سوف يختار (I) لأنه يهيمن على (III). والأمر ليس كذلك بالطبع بين (I) و(II) فإذا كانت (5 > 4-)، فإن (8 > 6-). فإذا كان (I) يهيمن على (II) عندما يتبع (ش2) (X)، فإن (II) يهيمن على (I) عندما يتبع (ش2) (Y). وبالتالي لا يعتبر (I) مهيمناً على (II) من وجهة نظر (ش1). وبالتالي فهو وإن كان لن يعتد بوجود (III) عند تحديد استراتيجيته المثلى، فهو لا بد وأن يعتد بوجود (I) و(II).

ونلاحظ أيضاً أن البديل (X) من وجهة نظر (ش2) يهيمن على البديل (W) له.

ذلك مع تذكر أن العوائد الموجبة من وجهة نظر (ش1) هي عوائد سالبة من وجهة نظر (ش2). وبذلك نجد أن:

$$-5 > -9,\ 4 = 4,\ -4 > -8$$

وهذا يعني أنه إذا كان المشروع (ش2) له أن يختار بين (X, W) فهو سوف يختار (X) بصفة دائمة، وبالتالي فهو لن يعتد بوجود (W) عند تحديد استراتيجيته المثلى. ويترتب على ذلك أن تصبح مصفوفة العائد الفعالة في هذه المباراة موضحة في الجدول (4 ـ 8)

جدول (4 ـ 8)

الاحتمالات	استراتيجية X (H)	استراتيجية Y (1 - H)	أدنى مكاسب ش 1
P استراتيجية I ش 1	5	-6	-6
(1 - P) استراتيجية II	-4	8	-4
أقصى خسائر	5	8	

وحيث يتفق أدنى الأقصيات مع أقصى الأدنيات، فإن المباراة ليس لها نقطة توازن مشتركة Saddle Point، وبالتالي تكون الاستراتيجيات المثلى فيها مختلطة، ويمكن أن تحدد جبرياً بالطريقة التي اتبعناها سابقاً كالآتي:

$$Z = P[5(H) + (-6)(1 - H)] + (1 - P)[-4(H) + 8(1 - H)]$$

$$= 23\,(PH - 14/23P - 12/23H) + 8$$

$$= 23\,(P - 12/23)(H - 14/23) - 168/23 + 8$$

$$= 23\,(P - 12/23)(H - 14/23) + 16/23$$

وتكون الاستراتيجيات المثلى وقيمة المباريات من وجهة نظر كل من المشروعين كالآتي:

المشروع	ش1	ش2
الاستراتيجية المثلى	(12/23 ،11/23)	(14/23 ،9/23)
قيمة المباراة	16/23	-16/23

ومن الواضح أن استبعاد البدائل غير الفعالة والإبقاء على البدائل المهيمنة يسهل من أمر تحديد الاستراتيجيات المثلى للمتنافسين، وما لم يتم استبعاد (W), (III) في المباراة بفعالية كبدائل غير فعالة لأصبح أمر تحديد الاستراتيجية المثلى لكل من المشروعين بالغ التعقيد بالطريقة الجبرية. وسوف نرى في البند التالي أن البرمجة الخطية يمكن استخدامها بفعالية لتحديد الاستراتيجيات المثلى في حالة تعدد البدائل؛ فهي التي تجعل أمر تحديد

الاستراتيجيات المثلى أقل عناء وتكلفة.

تحديد الاستراتيجيات المثلى بالبرمجة الخطية:

إن اللجوء إلى الحل بطريقة البرمجة الخطية يتم عند عدم وجود نقطة توازن بالمباراة (أيا كان حجم المباراة) وعند فشل طرق الحل السابقة في التوصل إلى حل المباراة؛ حيث إن هناك علاقة قوية بين مسألة البرمجة الخطية ونظرية المباراة لأن كل مباراة ذات مجموع صفري من الممكن تمثيلها بنموذج للبرمجة الخطية والعكس صحيح، إذ أن أقل برنامج خطي يمكن تمثيله بموضوع مباراة.

مثال (8):

المصفوفة التالية تبين مصفوفة المباراة

	B		
A	3	2	2
	2	3	1
	1	2	3

المطلوب ـ حل المشلكة بواسطة طريقة البرمجة الخطية.

نفرض أن نسبة الوقت للخطط التي يلعبها A هي (X1, X2, X3) وأن نسبة الوقت للخطط التي يلعبها B هي (Y1, Y2, Y3)، وأن قيمة المباراة هي V لذلك يمكن كتابة المصفوفة كالآتي:

	Y1	Y2	Y3
X1	3	2	2
X2	2	3	1
X3	1	2	3

$$X1 + X2 + X3 = 1$$

$$Y1 + Y2 + Y3 = 1$$

ففي حالة لعب B العمود الأول من الوقت (Y1 من الوقت) فإن قيمة المدفوعات للاعب A هي:

$$3X1 + 2X2 + X3$$

وبالمقابل إذا لعب A الصف الأول (X1 من الوقت) فإن قيمة المدفوعات المتوقعة للاعب B هي:

$$3Y1 + 2Y2 + 2Y3$$

وحيث إن قيمة المباراة الموجبة تكون لصالح اللاعب A والسالبة لصالح B وأن أحد اللاعبين المشتركين في المباراة يحاول تحقيق هدفه بزيادة ربحه إذا كان ذلك ممكناً أو تقليل خسارته إذا لم يكن هنالك مفر من الخسارة. وطبقاً إلى معياري (Max, Min) في الاستراتيجيات المركبة، فإن اللاعب A سيحاول اختيار قيم Xi التي تعظم أقل ربح متوقع له بينما اللاعب B يحاول اختيار قيم Yi التي تقلل أكبر خسارة متوقعة له. وعلى ذلك فإن اللاعب A سيجعل من قيمة المباراة V أكبر ما يمكن وبالمقابل فإن B سيحاول أن يجعل من V أقل ما يمكن. لذلك فإن ما يتوقعه A من المدفوعات من كل صنف من المصفوفة يجب أن يكون أكبر من V أو مساوياً لها وإلا فلن تحقق الخطة المتبعة هذه مما يستدعي إهمالها أو حذفها من حساباته، وبالمقابل فإن ما يتوقعه B من المدفوعات من كل عمود من أعمدته يجب أن يكون أصغر من قيمة V أو مساوياً لها لنفس السبب أعلاه.

ومن أجل تعيين استراتيجية اللاعب B نضع المتباينات التالية بين ما يتوقعه A من مدفوعات وفقاً لخطط ما يتوقعه A من مدفوعات إذا لعب B العمود الأول:

$$3X1 + 2X2 + X3 \geqslant V$$

أما إذا لعب B العمود الثاني $2X1 + 3X2 + 2X3 \geqslant V$

أما إذا لعب العمود الثالث $2X1 + X2 + 2X3 \geqslant V$

وبما أن مجموع نسب الوقت المصروف من قبل A للعب الصفوف الثلاثة يساوي وحدة واحدة:

$$X1 + X2 + X3 = 1$$

وبقسمة طرفي المتباينات أعلاه على V:

$$3X1/V + 2X2/V + X3/V \geqslant 1$$

$$2X1/V + 3X2/V + 2X3/V \geqslant 1$$

$$2X1/V + X2/V + 3X3/V \geqslant 1$$

$$X1/V + X2/V + X3/V = 1/V$$

ولإزالة القيمة V تعتبر $X2/V, X1^{*} = X3/V, X2^{*} = X3^{*} = X1/V$ في المعادلات أعلاه

$$3XQ^{*} + 2X2^{*} + X3^{*} \geqslant 1$$

$$2X1^{*} + 3X2^{*} + 2X3^{*} \geqslant 1$$

$$2X1^{*} + X2^{*} + X3^{*} \geqslant 1$$

$$X1^{*} + X2^{*} + X3^{*} = 1/V$$

وحيث إن A يستهدف زيادة V أي تقليل (1/V) فإنه يمكن صياغة المحددات أعلاه على الشكل التالي لحلها بالبرمجة الخطية:

$$\text{Min. } Z = X1^{*} + X2^{*} + X3^{*}$$

$$\text{S. T. } 3X1^{*} + 2X2^{*} + X3^{*} \geqslant 1$$

$$2X1^{*} + 3X2^{*} + 2X3^{*} \geqslant 1$$

$$X1^{*}, X2^{*}, X3^{*} \geqslant 0$$

أما ما يتوقعه B من المدفوعات فهي:

$$3Y1 + 2Y2 + 2Y3 \leqslant V$$

$$2Y1 + 3Y2 + Y3 \leqslant V$$

$$Y1 + 2Y2 + 3Y3 \leqslant V$$

$$Y1 + Y2 + Y3 = 1$$

وبنفس ما اتبع بالنسبة للاعب A وبالقسمة على V تم اعتبار $Y^{*} = Y/V$ في طرفي المعادلات بحيث تصاغ المعادلات كالآتي:

$$\text{Max. } Z = Y1^{*} + Y2^{*} + Y3^{*}$$

$$\text{S. T. } 3Y1^{*} + 2Y2^{*} + 2Y3^{*} \leqslant 1$$

$$2Y1^{*} + 3Y2^{*} + Y3^{*} \leqslant 1$$

$$Y1^{*} + 2Y2^{*} + 3Y3^{*} \leqslant 1$$

$$Y1^{*}, Y2^{*}, Y3^{*} \geqslant 0$$

حيث إن $Y1^{*} = Y1/V, Y1^{*} = Y2/V, Y1^{*} = Y3/V, Z = 1/V$

يمكن اعتبار استراتيجية اللاعب B هي المشكلة الثنائية (dual problem) لمشكلة البرمجة الخطية الأولية (primal problem) ولذلك يتم حل المشكلة بالنسبة لاستراتيجية B وفق طريقة السمبلكس الثنائية (dual simplex method) كالآتي:

$$\text{Max. } Z = Y1^{*} + Y2^{*} + Y3^{*} - oS1 - oS2 - oS3 = 0$$

$$3Y1^{*} + 2Y2^{*} + 2Y3^{*} + S1 = 1$$

$$2Y1^{*} + 3Y2^{*} + Y3^{*} + S2 = 1$$

$$Y1^{*} + 2Y2^{*} + 3Y3 + S3 = 1$$

$$Y1^{*}, Y2^{*}, Y3^{*}, S1, S2, S3 \geqslant 0$$

الجدول المبدئي (5 ـ 8)

		1	1	1	0	0	0	
		Y1*	Y2*	Y3*	S1	S2	S3	RHS
0	S1	3	2	2	1	0	0	1
0	S2	2	3	1	0	1	0	1
0	S3	1	2	3	0	0	1	1
	Z	0	0	0	0	0	0	0
	C - Z	1	1	1	0	0	0	

الجدول الأول (6 ـ 8)

		1	1	1	0	0	0	
		Y1*	Y2*	Y3*	S1	S2	S3	RHS
1	Y1*	1	2/3	2/3	1/3	0	0	1/3
0	S2	0	5/3	- 1/3	- 2/3	1	0	1/3
0	S1	0	4/3	7/3	- 1/3	0	1	2/3
	Z	1	2/3	2/3	1/3	0	0	1/3
	C - Z	0	1/3	1/3	- 1/3	0	0	

الجدول الثاني (7 ـ 8)

		1	1	1	0	0	0	
		Y1*	Y2*	Y3*	S1	S2	S34	RHS
1	Y1*	1	22/4	0	9/2	0	- 2/7	3/7
0	S2	0	39/4	0	13/21	1	1/7	9/2
1	Y3*	0	4/7	1	- 1/7	0	3/7	2/7
	Z	1	7/4	0	6/12	0	1/7	9/2
	C - Z	0	3/4	0	- 6/12	0	- 1/7	

جدول الحل الأمثل (8 ـ 8)

		1	1	1	0	0	0	
		Y1*	Y2*	Y3*	S1	S2	S3	RHS
1	Y1*	1	0	0	- 4/63	- 22/21	- 100/273	145/441
1	Y2*	0	1	0	1/3	7/13	1/13	2/21
1	Y3*	0	0	1	- 7/21	- 4/13	35/91	18/91
	Z	1	1	1	7/21	4/3	14/91	65/147
	C - Z	0	0	0	- 7/21	- 4/3	- 14/19	

$Z = 65/147\ V = 1/Z\ V = 147/65$

$V = 2.26$

$Y1^* = 145/441\ Y1 = V^*\ Y1^* = 0.3^*\ 2.26 = 0.67$

$Y2^* = 2/21\ Y2 = 0.095^*\ 2.26 = 0.21$

$Y1^* = 18/91\ Y3 = 0.197^*\ 2.26 = 0.44$

أما قيمة المشكلة الأولية Primal Problem من الحل الأمثل فتكون كالآتي:

$X1^* = 7/21\ X1 = X1^*.\ V = 0.67$

$X2^* = 1/13\ X2 = X2^*.\ V = 0.17$

$X3^* = 14/91\ X3 = X3^*.\ V = 0.35$

أسئلة وتمارين

الأسئلة:

س 1 ـ ما هو المقصود بنظرية المباراة؟ وما هي المجالات التي تستخدم فيها؟

س 2 ـ أذكر التصنيفات المختلفة لنظرية المباراة.

س 3 ـ ما هو المقصود بكل من:

1 ـ الاستراتيجيات الصرفة والمختلطة.

2 ـ المباراة صفرية الحصيلة، دالة عائد المباراة.

التمارين:

س 1 ـ إذا توفرت لديك المصفوفات التالية، أوجد السياسة المثلى للاعبان A, B ومقدار المباراة.

:1

اللاعب B

اللاعب A

8	2	9
6	5	7
7	3	- 4

:2

اللاعب B

اللاعب A

- 9	5
6	- 7

:1

اللاعب B

اللاعب A

12	10
-8	-3
14	13

:2

اللاعب B

اللاعب A

8	-4	4	-14	8
-10	-6	20	16	18

س 2 ـ أوجد الاستراتيجيات المثلى وقيمة المباراة للمصفوفة التالية:

:1

اللاعب B

اللاعب A

18	12	19	15
16	15	17	28
17	13	-14	10
18	15	19	28

:2

اللاعب B

اللاعب A

-19	55
46	-37

قائمة المراجع أو المصادر

References

• المراجع العربية Arabic Reference:

1 ـ د. محمود سلامة، **الطرق الكمية في إدارة الأعمال**، بحوث العمليات.

2 ـ أ. سليمان محمد مرجان: **إدارة العمليات الإنتاجية** ـ دراسات تحليلية للعمليات الإنتاجية في المشروعات الصناعية، غريان، منشورات كلية المحاسبة، 1993.

3 ـ د. عبد الحي مرعي، **المعلومات المحاسبية وبحوث العمليات في اتخاذ القرارات** ـ الدار الجامعية 1988.

4 ـ د. زياد عبد الكريم القاضي، وآخرون، **بحوث العمليات**، دار المستقبل للنشر والتوزيع، عمان ـ الأردن، 1990.

5 ـ د. نظيمة عبد العظيم خالد، **إدارة المشتريات والمخازن**، القاهرة: الدار العربية للنشر والتوزيع، 1993.

6 ـ د. مجدي عمارة، وآخرون، **محاسبة التكاليف الفعلية**، منشورات كلية المحاسبة ـ غريان، 1992.

7 ـ د. منعم جلوب زمرير، **إدارة العمليات الإنتاجية**، طرابلس: منشورات الجامعة المفتوحة، 1992.

8 ـ د. جمعة خليفة الحاسي، وآخرون، **المحاسبة المتوسطة**، بيروت: دار النهضة العربية للطباعة والنشر، 1996.

9 ـ فالتر ميجس، روبرت ميجس، **المحاسبة المالية**، ترجمة وتعريب د. وصفي عبد الفتاح أبو المكارم، سلطان بن محمد السلطان، محمد هاشم البدوي، دار المريخ للنشر، 1988.

10 ـ د. محمد هادي العدنان، **المدخل في المحاسبة المالية**: أصولها، مبادئها، تطبيقاتها، طرابلس: منشورات الجامعة المفتوحة ـ الجزء الثاني.

11 ـ د. محمد محمد كعبور، **أساسيات بحوث العمليات**، نماذج وتطبيقات، غريان: منشورات كلية المحاسبة، 1992.

12 - د. السيد ناجي، إدارة المشتريات والمخازن - المبادىء العلمية والتطبيق العملي، القاهرة: دار الثقافة العربية، 1991.

13 - د. جميل أحمد توفيق، علي شريف، الإدارة المالية، بيروت: دار النهضة العربية للطباعة والنشر، 1980.

14 - د. جلال محمد بكير، الإدارة العلمية للمشتريات والمخازن، مكتبة عين شمس.

15 - عصمت حسين جعفر، الإدارة العلمية للمخزون والمخازن والمشتريات، القاهرة: مكتبة الأنجلو المصرية.

16 - د. يسرى خضر إسماعيل، التمويل والإدارة المالية، القاهرة: دار النهضة العربية.

17 - د. حمدي طه، مقدمة في بحوث العمليات تعريب د. أحمد حسين علي حسين، الرياض: دار المريخ للنشر.

18 - د. أحمد سرور محمد، إدارة الإنتاج والعمليات، القاهرة: مكتبة عين شمس، 1990.

19 - د. علي عبد السلام المعزاوي، بحوث العمليات في مجال الإنتاج والتخزين والنقل، القاهرة: دار النهضة العربية.

20 - د. محمود محمد المنصوري، عبد الجليل آدم المنصوري، الأساليب الكمية لاتخاذ القرارات الإدارية، بنغازي: المعهد العالي للعلوم الإدارية والمالية، 1989.

21 - د. عبد الحميد مصطفى أبو ناعم، إدارة رأس المال العامل، الدار العربية للنشر والتوزيع، 1993.

22 - د. محمود محمد المنصوري، أساليب بحوث العمليات واستخدامها في ترشيد عملية اتخاذ القرارات، الطبعة الأولى، بنغازي: منشورات مركز بحوث العلوم الاقتصادية، 1996.

23 - فرد ويستون، يوجين برجام، التمويل الإداري - الجزء الأول، تعريب: د. عدنان داغستاني، عبد الفتاح السيد النعماني، الرياض: دار المريخ للنشر، 1993.

24 - د. محمد سعيد عبد الفتاح، إدارة المشتريات والمخازن، الإسكندرية: المكتب العربي الحديث، 1985.

25 - د. محمود محمد المنصوري، إدارة النظم والعمليات الإنتاجية، بنغازي: - منشورات مركز بحوث العلوم الاقتصادية، الطبعة الثانية، 1998 .

26 - د. نظيمة عبد العظيم خالد، إدارة المخازن: المبادىء العلمية والتطبيق العملي، القاهرة: دار الثقافة العربية، 1977 .

27 - د. سمير علام، إدارة الموارد والرقابة على المخزون، (القاهرة: مركز التعليم المفتوح، جامعة القاهرة، 1994 .

28 - د. بسمان فيصل محجوب، إنتصار توفيق اليوزبكي، إستخدام نظام نقطة الطلب، كمية الطالب (S, Q) في التخطيط والسيطرة على المخزون من الأدوات الاحتياطية السريعة الحركة (دراسة تطبيقية)، عمان: المجلة العربية للإدارة، المجلد الرابع عشر، خريف 1995، ص 143.

29 - د. محمد توفيق ماضي، د. إسماعيل السيد، إدارة المواد والإمداد، الإسكندرية: الدار الجامعية طبع - نشر - توزيع 1999/ 2000 .

30 - د. طلبه زين الدين: بحوث العمليات، (الأساس الرياضي والإحصائي ومجالات التطبيق) (القاهرة، مكتبة عين شمس، 1998).

31 - د. عبد الغفار حنفي، إدارة المواد والإمداد والرقابة على المخزون بالمستودعات، بيروت: الدار الجامعية للطباعة والنشر، 1998 .

32 - د. محمد صالح الحناوي، د. محمد توفيق ماضي، تخطيط ومراقبة الإنتاج - مدخل بحوث العمليات الإسكندرية: الدار الجامعية، 1993).

33 - حمدي أ. طه، مقدمة في بحوث العمليات، ترجمة. د. أحمد حسين علي حسين، السعودية: دار المريخ. 1996.

34 - د. محمد توفيق ماضي، إدارة الإنتاج والعمليات، الدار الجامعية، 1996.

35 - أ. د. محمد عبد العال النعيمي وآخرون، بحوث العمليات، الأردن: دار وائل للطباعة والنشر، الطبعة الأولى، 1999 .

• المراجع الأجنبية English Reference:

1 - Burton J. A., **Effective Warchousing**, 3rd Ed, Macdonald Evans LTD, 1981, p. 8.

2 - Betnel; Atwater; Smith; and Stackman, **Industrial Organization and Management**.

3 - HAMDY A. TAHA, OPERATIONS RESEARCH, Singapore: Macmillan Publishing Company, 1992.

الملحق

الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية

1 ـ المفاهيم الأساسية لنظرية الاحتمالات:

أ ـ التجربة العشوائية (Random Experiment):

هي كل عمل أو إجراء نعلم مقدماً بجميع نتائجه الممكنة ولكن لا نعلم مسبقاً أياً من هذه النتائج سوف نحصل عليها عند القيام بهذا العمل أو الإجراء؛ فمثلاً عند إلقاء قطعة نقود في الهواء وتركها حتى تستقر على الأرض وأحد وجهيها إلى الأعلى فنعلم مسبقاً أن نتائج هذه العملية هي الحصول على الصورة أو الكتابة، ولكن لا نعلم على وجه التحديد أياً من هذين الناتجين سوف نحصل عليه عند القيام بهذا العمل؛ لذلك فإن هذه العملية تعرف بالتجربة العشوائية.

ب ـ فراغ العينة (Sample Space):

هو فئة جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ويرمز له بالرمز (S) وقد يكون فراغ العينة محدوداً إذا كان عدد نتائج التجربة محدوداً، وقد يكون فراغ العينة غير محدود إذا كان عدد نتائج التجربة غير محدود. فمثلاً عند إلقاء زهرة نرد في الهواء وتركها حتى تستقر على الأرض وأحد وجهيها إلى أعلى فإن فراغ العينة لهذه التجربة هو $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وهو فراغ عينة محدود. وعند اختيار طالب وقياس وزنه فيكون فراغ العينة غير محدود.

جـ ـ الحدث (Event):

هو فئة جزئية من فراغ العينة (S) ويسمى حدثاً بسيطاً إذا كان يحتوي على نتيجة واحدة فقط ويسمى حدثاً مركباً إذا كان يحتوي على أكثر من نتيجة واحدة.

مثال (1) ـ فمثلاً عند إلقاء زهرة نرد فإن:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

فإذا كان A يمثل حدث الحصول على عدد أقل من 2 فإن $A = \{1\}$ وبالتالي فإن A هو حدث بسيط. أما إذا كان A يمثل حدث الحصول على عدد زوجي فإن $A = \{2, 4, 6\}$ وهو حدث مركب.

د ـ الحدث المؤكد:

هو الحدث الذي يشمل جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية (فراغ العينة). فمن المثال السابق إذا كان C يمثل حدث الحصول على عدد أكبر من أو يساوي الواحد الصحيح فإن $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وهو حدث مؤكد.

هـ ـ الحدث المستحيل:

هو الحدث الذي لا يحتوي على أية ناتج من نتائج التجربة العشوائية ويرمز له بالرمز $\varnothing$. فمثلاً من المثال السابق إذا كان D يمثل حدث الحصول على عدد أكبر من 6 فإن $D = \varnothing$.

و ـ الحدث المكمل (Complementary Event):

هو الحدث الذي يحتوي جميع نتائج التجربة العشوائية ولكنه ليس من ضمن الحدث الأصلي؛ فإذا كان A حدث من فراغ عينة محدودة فإن الحدث المكمل له يرمز له بالرمز A' أو A^c.

فإذا كان $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وكانت $A = \{2, 4, 6\}$ فإن $A' = \{1,3, 5\}$.

ز ـ الأحداث المتنافية والأحداث غير المتنافية (Mutually Exclusive Events):

الأحداث المتنافية هي الأحداث التي لا يمكن وقوعها معاً، في حين الأحداث غير المتنافية هي الأحداث التي يمكن وقوعها معاً. فإذا كان B, A حدثين متنافيين فإن $(A \cap B) = \varnothing$. أما إذا كان (B, A) حدثين غير متنافيين فإن $(A \cap B) \neq \varnothing$.

فمثلاً إذا كان $A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 3, 5\}$ فإن B, A حدثان متنافيات. $A = \{2,3,4,5,6\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ فإن B, A حدثان غير متنافيين حيث $A \cap B = (2$ و$3)$.

ر ـ الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة (Independent Events):

الأحداث المستقلة هي الأحداث التي لا يؤثر حدوث أحدها على حدوث الأحداث الأخرى. في حين الأحداث غير المستقلة هي الأحداث التي يؤثر حدوث أحدها على حدوث الأحداث الأخرى. فمثلاً في تجربة اختيار كرتين من بين 5 كرات بيضاء و6 كرات سوداء. فإذا كان الاختيار عن أساس واحدة بعد الأخرى بالإرجاع (بالإحلال) فإن حدث اختيار كرة بيضاء مستقل على حدث اختيار كرة سوداء. أما إذا كان الاختيار على أساس عدم الإرجاع (بدون إحلال)، فإن حدث اختيار كرة بيضاء يكون غير مستقل على حدث اختيار كرة سوداء.

2 ـ القواعد الأساسية لتحديد عدد عناصر فراغ (S) أو أي حدث:

حيث إن فراغ العينة وعدد الحالات التي تحقق حدثاً معيناً يستخدم في حساب الاحتمالات بهذا الحدث، وفي بعض الأحيان يكون عدد عناصر فراغ العينة عدداً كبيراً

لذلك يمكن تحديد عدد عناصره أو عدد الحالات التي تحقق حدثاً معيناً بإحدى الطرق التالية:

أ ـ القاعدة الأساسية للعدد:

إذا أجرينا تجربة عشوائية على عدة مراحل وليكن K مرحلة وكان عدد نتائج المرحلة الأولى n1 وعدد نتائج المرحلة الثانية n2 وعدد نتائج المرحلة الثالثة n3 وهكذا إلى عدد نتائج المرحلة الأخيرة nk فإن فراغ العينة لهذه التجربة هو $n1 \times n2 \times n3 \times .... \times nk$.

مثال (2) ـ إذا كانت اللوحة المعدنية لرقم السيارة تحتوي على ثلاثة أرقام بحيث رقم المئات لا يكون صفراً فكم عدد اللوحات التي يمكن طبعها لأرقام السيارات (عدد عناصر هذه التجربة).

نلاحظ: أنه يمكن اختيار الرقم الأول (رقم الآحاد) بعشر طرق $(n1 = 10)$

ويمكن اختيار الرقم الثاني (رقم العشرات) بعشر طرق $(n2 = 10)$

ويمكن اختيار الرقم الثالث (رقم المئات) بتسع طرق $(n3 = 9)$

وبذلك فإن عدد اللوحات التي يمكن طبعها $= 10 \times 10 \times 9 = 900$ لوحة.

مثال (3) ـ بكم طريقة يمكن أخذ ثلاثة أحرف معاً من الأحرف الآتية: a, b, c, d

يمكن اختيار الحرف الأول بأربع طرق $n1 = 4$

يمكن اختيار الحرف الثاني بثلاث طرق $n2 = 3$

يمكن اختيار الحرف الثالث بطريقتين $n3 = 2$

وبذلك يكون عدد طرق اختيار ثلاثة أحرف معاً $= 4 \times 3 \times 2 = 24$ طريقة.

ب ـ قانون التباديل Permutation:

التبديل هو عدد طرق اختيار r عنصر من بين n عنصر مع أخذ الترتيب في الاعتبار (الترتيب مهم) ويرمز له بالرمز

حيث: P_r^n

حيث $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

علماً بأن (n !) يقرأ مضروب (n) وأن $n! = n\,(n - 1)\,(n - 2) ... 3 \times 2 \times 1$

و $1 = !1 = o!$ فمثلاً $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

مثال (4) ـ كم عدد مكون من أربعة أرقام يمكن تركيبه من الأرقام التالية: 2، 3، 4، 6، 8، 9

حيث إن الترتيب هنا مهم فالعدد 6432 يختلف عن العدد 4623 لذلك نستخدم قانون التباديل ب $r = 4, n = 6$ وبذلك يكون عدد الأعداد التي يمكن تكوينها هو:

$$P_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2!}{2!} = 360$$

جـ ـ قانون التباديل مع وجود تكرار لبعض العناصر:

يراد أحياناً معرفة عدد طرق تباديل (n) عنصراً والتي يوجد من بينها عناصر مكررة أكثر من مرة؛ ففي هذه الحالة يستخدم قانون التباديل مع وجود تكرار وهو

$$S = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \dots \times n_k}$$

حيث (n1) عدد مرات تكرار العنصر الأول و(n2) عدد مرات تكرار العنصر الثاني وهكذا إلى nk عدد مرات تكرار العنصر الأخير بحيث $n1 + n2 + n3 + \dots + nk = n$

د ـ قانون التوافيق:

التوافيق هو عدد طرق اختيار r عنصر من بين n عنصر دون أخذ الترتيب في الاعتبار (الترتيب غير مهم). ويرمز له بالرمز C_r^n حيث:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال (5) ـ كم لجنة ثلاثية يمكن تكوينها من بين 8 أشخاص؟

نلاحظ هنا الترتيب غير مهم لذلك يستخدم قانون التوافيق ب $r = 3, n = 8$

وبذلك يكون عدد اللجان التي يمكن تكوينها

$$C_3^8 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$$

مثال (6) ـ في أحد الامتحانات مطلوب من الطالب أن يجيب على أربعة أسئلة من بين ستة أسئلة، فبكم طريقة يمكن أن يختار الطالب الأسئلة؟

حيث إن الترتيب هنا غير مهم لذلك نستخدم قانون التوافيق ب $r = 4, n = 6$ وبذلك يكون عدد طرق اختيار الأسئلة هو:

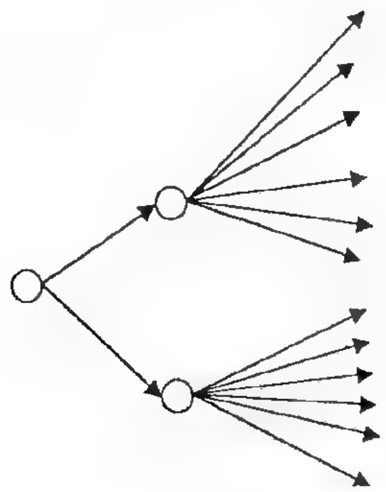
$$C_4^6 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$$

هـ ـ طريقة الشجرة البيانية:

هي طريقة تستعمل كل النتائج الممكنة من التجارب إذا كانت كل تجربة يمكن وقوعها بعدد منتهٍ من الطرق حيث نرسم شجرة بعدد من الأفرع مساو لعدد نتائج التجربة الأولى، وكل فرع من هذه الأفرع يتفرع إلى عدد من الأفرع بعدد نتائج التجربة الثانية وهكذا إلى أن نصل إلى التجربة الأخيرة. وبذلك يكون فراغ العينة عبارة عن عدد الفروع الأخيرة لهذه الشجرة.

مثال (7) ـ إذا ألقيت قطعة نقود وزهرة نرد معاً فأوجد فراغ العينة باستخدام الشجرة البيانية.

شكل (1 ـ 5)



وبذلك يكون عدد عناصر فراغ العينة = 12

أي أن:

$$S = \{(T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6), (H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6)\}$$

و ـ العينات المرتبة:

تدور الكثير من مشاكل التحليل وبصفة خاصة في علم الاحتمالات حول اختيار r عنصر من بين n عنصر بالإحلال أو بدون إحلال.

1 ـ المعاينة مع الإحلال (الإرجاع):

في هذه الحالة يعاد العنصر المختار أولاً قبل اختيار العنصر الثاني ثم يعاد العنصر الثاني قبل اختيار العنصر الثالث وهكذا إلى العنصر الأخير، لذلك يكون عدد طرق اختيار العنصر الأول يساوي عدد طرق اختيار العنصر الثاني وهكذا إلى العنصر الأخير ويساوي (n)، لذلك يمكن استخدام القاعدة الأساسية للعد لتحديد عدد طرق اختيار r عنصر من بين n عنصر مع الإحلال وهي n^r.

مثال (8) ـ صندوق به 6 بطاقات مرقمة من 1 إلى 6 سحبت عشوائياً بطاقتان واحدة بعد الأخرى مع الإحلال. كم عدد عناصر فراغ العينة؟ عدد عناصر فراغ العينة هو $6^2 = 36$.

2 ـ المعاينة بدون إحلال (بدون إرجاع):

في هذه الحالة لا يعاد العنصر المختار أولاً قبل اختيار العنصر الثاني ولا يعاد العنصر الثاني قبل اختيار العنصر الثالث وهكذا إلى العنصر الأخير. وبذلك لا يظهر العنصر المختار أولاً مرة أخرى وكذلك العنصر المختار ثانياً وهكذا إلى العنصر الأخير. لذلك يمكن استخدام قانون التباديل في تحديد عدد عناصر فراغ العينة في مثل هذه الحالة.

مثال (9) ـ من المثال السابق كم عدد عناصر فراغ العينة إذا سحب من الصندوق بطاقتان واحدة بعد الأخرى بدون إحلال (بدون إرجاع). عدد عناصر فراغ العينة:

$$P_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 6 \times 5 = 30$$

3 ـ المعاينة معاً:

في هذه الحالة كل العناصر تؤخذ معاً لذلك يكون الترتيب غير مهم. وبذلك يمكن استخدام قانون التوافيق.

مثال (10) ـ من المثال السابق إذا أخذنا بطاقتين معاً، فكم يكون عدد عناصر فراغ العينة؟

حيث إن الاختيار هنا معاً لذلك يمكن استخدام قانون التوافيق:

$$C_2^6 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1 \times 4!} = \frac{30}{2} = 15$$

3 ـ حساب الاحتمال لحدث معين:

إذا أجرينا تجربة عشوائية n مرة وحصلنا على الحدث A في m نتيجة فإن احتمال الحصول على هذا الحدث عند إجراء التجربة مرة أخرى يرمز له بالرمز P (A) حيث $P(A) = \frac{m}{n}$ وهذا ما يعرف بالتعريف التجريبي للاحتمال.

وإذا كان عدد نتائج فراغ العينة لتجربة عشوائية n نتيجة من بينها m نتيجة تحقق الحدث A، فإن احتمال الحصول على هذا الحدث عند إجراء التجربة مرة أخرى يرمز له بالرمز P (A) حيث $P(A) = \frac{m}{n}$ وهذا ما يعرف بالتعريف الكلاسيكي للاحتمال.

مثال (11) ـ عند رمي زهرة نرد ما احتمال ظهور عدد زوجي

فراغ العينة {1, 2, 3, 4, 5, 6} = S به 6 نتائج أي أن n = 6

نفرض A يمثل حدث ظهور عدد زوجي {2, 4, 6} = A به ثلاث نتائج أي أن m = 3

وبالتالي:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$$

مثال (12) ـ إذا اختير طالب عشوائياً من طلبة هذا الفصل الذي به 40 طالباً و20 طالبة فما احتمال اختيار طالبة. عدد طرق الاختيار الكلية هو n = 40 + 20 = 60.

نفرض A يمثل حدث اختيار طالبة فإن عدد الحالات التي تحقق هذا الحدث هو m = 20 وبالتالي:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{20}{60} = 0.33$$

مثال (13) ـ إذا كان الإنتاج اليوم لأحد المصانع 1000 من بينها 20 وحدة غير صالحة. فإذا سحبت وحدة واحدة من إنتاج هذا المصنع فأوجد احتمال سحب وحدة صالحة.

الحل:

عدد طرق اختيار وحدة من إنتاج هذا المصنع هي n = 1000

نفرض A تمثل سحب وحدة صالحة. عدد طرق اختيار وحدة صالحة هو m = 980 وبالتالي فإن:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{980}{1000} = 0.98$$

مسلمات الاحتمالات:

- إحتمال ظهور أي حدث أكبر من أو يساوي الصفر وأقل من أو يساوي الواحد أي أن:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

- إحتمال الحدث المكمل يساوي واحداً ناقص احتمال الحدث الأصلي أي أن: $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- إحتمال الحدث المؤكد يساوي واحداً صحيحاً أي أن: $P(S) = 1$.
- إحتمال الحدث المستحيل يساوي صفراً أي أن: $P(\varnothing) = 0$.

4 ـ بعض قوانين حساب الاحتمالات لأكثر من حدث:

أ ـ إذا كانت الأحداث متنافية:

إذا كان B, A حدثين متنافيين فإن احتمال وقوع أحدهما A أو B يرمز له بالرمز P (A ∪ B) حيث $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ويمكن تعميم هذا القانون لأي عدد من الأحداث المتنافية. فإذا كانت $A, B, C, ..., Z$ أحداثاً متنافية فإن:

$$P(A \cup B \cup C \cup .... \cup Z) = P(A) + P(B) + P(C) + ... + P(Z)$$

مثال (14) ـ بفرض أن منشأة صناعية اشترت 1000 وحدة من سلعة معينة، منها 20 وحدة بها عيوب كبيرة و90 وحدة بها عيوب بسيطة. فإذا سحبت وحدة واحدة من هذه السلعة فما هو احتمال وجود عيب كبير أو بسيط في الوحدة المسحوبة؟

نفرض A يمثل حدث وجود وحدة بها عيب كبير وبالتالي فإن $P(A) = 20/1000 = 2/100$

نفرض B هو حدث وجود وحدة بها عيوب بسيطة وبالتالي فإن $P(B) = 90/1000 = 9/100$

وحيث إن A, B حدثان متنافيان فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 2/100 + 9/100 = 11/100 = 0.11$$

ب ـ إذا كانت الأحداث مستقلة:

إذا كان A, B حدثين مستقلين فإن احتمال وقوعهما معاً يرمز له بالرمز $P(A \cap B)$ حيث $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

ويمكن تعميم هذا القانون لأي من الأحداث المستقلة. فإذا كانت $A, B, C ... Z$ أحداثاً مستقلة فإن:

$$P(A \cap B \cap Cn... nz) = P(A) \times P(B) \times P(C) \times Y.... \times P(Z)$$

مثال 15 ـ صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و5 كرات حمراء وكرتين سوداوين، فإذا سحبت من هذا الصندوق عشوائياً كرتين واحدة بعد الأخرى بالإرجاع فأوجد:

1 ـ إحتمال سحب كرة بيضاء وأخرى حمراء.

2 ـ إحتمال سحب كرة حمراء وأخرى سوداء.

3 ـ إحتمال أن تكون الكرتين حمراوين.

4 ـ إذا سحبت ثلاث كرات بالإرجاع فما احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء والثالثة سوداء؟.

الحل:

نفرض A يمثل حدث سحب كرة بيضاء وبالتالي فإن $P(A) = 0.3$

نفرض B يمثل حدث سحب كرة حمراء وبالتالي فإن $P(B) = 0.5$

نفرض A يمثل حدث سحب كرة سوداء وبالتالي فإن $P(C) = 0.2$

وحيث إن السحب بالإحلال (بالإرجاع) فتكون الأحداث مستقلة.

1 ـ إحتمال سحب كرة بيضاء وأخرى حمراء هو $= P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.3 \times 0.5 = 0.15$.

2 ـ إحتمال سحب كرة حمراء وأخرى سوداء هو $= P(B \cap C) = P(B) \times P(C) = 0.5 \times 0.2 = 0.10$.

3 ـ إحتمال أن تكون الكرتان حمراوين هو:

$$P(B \cap B) = P(B) \times P(B) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$$

4 ـ إذا سحبت ثلاث كرات بالإرجاع فإن احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء والثالثة سوداء هو:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) = 0.3 \times 0.5 \times 0.2 = 0.03$$

مثال (16) ـ إذا كان في منشأة ما محاسب ومراجع وإذا كان احتمال أن المحاسب لا يخطىء عند قيامه بعمل معين هو 0.90 واحتمال أن المراجع لا يخطىء عند مراجعة هذا العمل هو 0.95 فما احتمال إتمام عمل معين دون وجود خطأ من المحاسب والمراجع وما احتمال خطأ الاثنين معاً إذا علمت أن عمل المحاسب مستقل عن عمل المراجع.

الحل:

نفرض A يمثل حدث عدم خطأ المحاسب عند قيامه بعمل معين وبالتالي فإن $P(A) = 0.9$

نفرض B يمثل حدث عدم خطأ المراجع عند مراجعته لعمل المحاسب وبالتالي فإن $P(B) = 0.95$.

∴ إحتمال عدم خطإ الاثنين معاً $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.9 \times 0.95 = 0.955$

إحتمال خطأ المحاسب هو $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.9 = 0.1$

أحتمال خطإ المراجع هو $P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.95 = 0.05$.

∴ احتمال خطأ الاثنين هو $P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = 0.1 \times 0.05 = 0.005$

جـ ـ إذا كانت الأحداث غير متنافية:

إذا كان A, B حدثين غير متنافيين أي يمكن وقوعهما معاً، في هذه الحالة يكون احتمال وقوع أحدهما A أو B يرمز له بالرمز $P(A \cap B)$ حيث:

$$P(A\ \ B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

وإذا كانت C, B, A أحداثاً غير متنافية فإن:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B0 + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

مثال (17) ـ من بين 3000 وحدة منتجة في أحد المصانع وجد أن 150 وحدة بها عيوب في الصنع و 270 وحدة بها عيوب في التشطيب النهائي و60 وحدة معيبة في الصنع والتشطيب النهائي. فإذا سحبت وحدة واحدة من هذا الإنتاج فما احتمال أن تكون الوحدة في الصنع أو التشطيب النهائي؟

نفرض A يمثل حدث سحب وحدة. في الصنع $\therefore P(A) = 150/3000 = 15/300$

نفرض B يمثل حدث سحب وحدة. في التشطيب النهائي $\therefore P(B) = 270/3000 = 27/300$

وبالتالي فإن احتمال سحب وحدة. في الصنع وفي التشطيب هو $P(A \cap B) = 60/3000 = 6/300$

وهذا يدل على أن الأحداث غير متنافية.

لذلك فاحتمال سحب وحدة معينة في الصنع أو التشطيب النهائي هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 15/300 + 27/300 - 6/300 = 36/300 = 0.12$$

د ـ إذا كانت الأحداث غير مستقلة:

إذا كان B, A حدثين غير مستقلين (أي وقوع أحدهما يتأثر بوقوع الآخر) وعليه فإن وقوع الحدث الأول يؤثر في احتمال وقوع الحدث الثاني لذلك عند حساب احتمال الحدث الثاني يكون مبنياً على وقوع الحدث الأول وهذا ما يعرف بالاحتمال الشرطي؛ فإذا وقع الحدث B أولاً فإن احتمال الحصول على الحدث A يكون مبنياً على الحدث B ويرمز له بالرمز P(A/B) ويقرأ احتمال وقوع الحدث A علماً بأن الحدث B قد وقع، أو احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B.

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B)$$

ومنه نجد أن:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

أما إذا وقع الحدث A أولاً، فإن احتمال وقوع الحدث B يكون مبنياً على الحدث

A فيرمز له بالرمز P(B/A) ويقرأ احتمال وقوع الحدث B، علماً بأن الحدث A قد وقع أو احتمال وقوع الحدث B بشرط وقوع الحدث A. وفي هذه الحالة نجد أن:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

ومنه نجد أن:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

وإذا كان هناك ثلاثة أحداث غير مستقلة C, B, A فإن:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/AB)$$

مثال (18):

إذا كان 80% من زبائن أحد المصارف لهم حسابات جارية، 50% لهم حسابات توفير و30% لهم الحسابان معاً. فإذا تم اختيار شخص عشوائياً من بين زبائن هذا المصرف فما هو احتمال أن يكون له حساب جارٍ علماً بأن لديه حساب توفير؟ وما هو احتمال أن يكون لديه حساب توفير علماً بأن لديه حساباً جارياً؟

نفرض A يمثل حدث اختيار شخص لديه حساب جارٍ، وبالتالي فإن $P(A) = 0.80$

نفرض B يمثل حدث اختيار شخص لديه حساب توفير، وبالتالي فإن $P(B) = 0.5$ و $P(A \cap B) = 0.30$

لذلك يكون:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.30}{0.50} = 0.60$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.30}{0.80} = 0.375$$

مثال (19) ـ صندوق به 3 كرات بيضاء و5 كرات حمراء وكرتان سوداوان. فإذا سحبت من الصندوق ثلاث كرات بدون إرجاع فأوجد:

1 ـ إحتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء والثالثة سوداء.

2 ـ إحتمال أن تكون الكرة الأولى سوداء والثانية بيضاء والثالثة حمراء.

الحل:

نفرض A يمثل حدث سحب كرة بيضاء أولاً $\therefore P(A) = 0.30$

نفرض B يمثل حدث سحب كرة حمراء أولاً $\therefore P(B) = 0.50$

نفرض C يمثل حدث سحب كرة سوداء أولاً $\therefore P(C) = 0.20$

وحيث إن السحب بدون إرجاع لذلك تكون الأحداث غير مستقلة.

فإذا سحبت الكرة الأولى وكانت بيضاء فإن احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء هو:

$$P(B/A) = 5/9 = 0.56$$

وإذا سحبت الكرة الأولى وكانت بيضاء وسحبت الكرة الثانية وكانت حمراء فإن احتمال أن تكون الثالثة سوداء هو $P(C/AB) = 2/8 = 0.25$.

وبالتالي فإن احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء والثالثة سوداء هو:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/AB) = 0.30 \times 0.56 \times 0.25 = 0.042$$

وإذا سحبت الكرة الأولى وكانت سوداء فإن احتمال أن تكون الثانية بيضاء هو $P(A/C) = 3/9 = 0.33$ واحتمال أن تكون الثالثة حمراء هو $P(B/CA) = 3/8 = 0.375$.

وبالتالي فإن احتمال أن تكون الكرة الأولى سوداء والثانية بيضاء والثالثة حمراء هو:

$$P(C \cap A \cap B) = P(C) \times P(A/C) \times P(B/CA) = 0.20 \times 0.33 \times 0.375 = 0.02475$$

هـ ـ حساب الاحتمالات باستخدام الشجرة البيانية:

يمكن حساب احتمال أي حدث في متابعة من التجارب بحيث تكون نواتجها منتهية باستخدام الشجرة البيانية، حيث نرسم شجرة بعدد من الأفرع مساو لعدد نتائج التجربة الأولى، وكل فرع من هذه الفروع يتفرع إلى عدد من الأفرع مساوٍ لعدد نتائج التجربة الثانية وهكذا إلى أن نصل إلى التجربة الأخيرة. ولحساب احتمال أي حدث في هذه المتابعة من التجارب بتتبع مسار هذا الحدث واستخدام قوانين الاحتمالات السابقة.

مثال (20) ـ إذا كان لدينا ثلاثة صناديق يحتوي الصندوق الأول على 10 مصابيح من بينها 4 معيبة. ويحتوي الصندوق الثاني على 6 مصابيح من بينها واحد معيب. ويحتوي الصندوق الثالث على 8 مصابيح من بينها 3 معيبة. فإذا اختير صندوق عشوائياً وسحب منه مصباح عشوائياً فما احتمال سحب مصباح معيب؟

شكل (2 ـ 5)

الحل:

في هذه التجربة متتابعتان من التجارب هما:

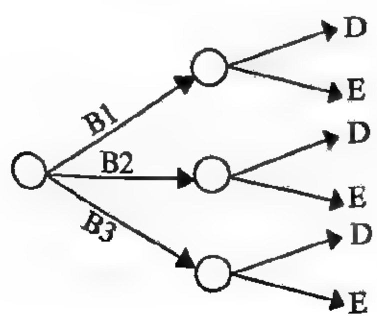
قد يكون معيباً = D

أو غير معيب = E

1 ـ إختيار صندوق من بين الصناديق الثلاثة.

2 ـ إختيار مصباح من الصندوق المختار.

يمكن حساب ذلك بالشجرة البيانية



المبينة هنا، حيث احتمال اختيار صندوق عشوائياً هو 1/3 واحتمال سحب مصباح معيب علماً بأنه من الصندوق الأول 4/10 واحتمال سحب مصباح معيب علماً بأنه من الصندوق الثاني 1/6 واحتمال سحب مصباح معيب علماً بأنه من الصندوق الثالث 3/8.

لذلك يكون احتمال سحب مصباح معيب من الصندوق الأول هو

$$1/3 \times 4/10 = 4/30$$

واحتمال سحب مصباح معيب من الصندوق الثاني هو

$$1/3 \times 1/6 = 1/18$$

واحتمال سحب مصباح معيب من الصندوق الثالث هو

$$1/3 \times 3/8 = 3/24$$

إحتمال سحب مصباح معيب = إحتمال سحب مصباح معيب من الصندوق الأول + إحتمال سحب مصباح معيب من الصندوق الثاني + إحتمال سحب مصباح معيب من الصندوق الثالث.

$$3/24 + 1/18 + 4/30 = 113 \div 360$$

و ـ نظرية بيز Bayes Formula:

نفرض أن $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ أحداث متنافية من فراغ عينة محدودة (S) حيث:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots\ldots \cup A_n = S$$

وأن B أي حدث آخر في فراغ العينة S حيث $B = S \cap B$

وبالتعويض بقيمة S نحصل على $B = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots A_n) \cap B$

وحيث إن $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ أحداث متنافية فإن:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \ldots\ldots (A_n \cap B)$$

وبالتالي فإن:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \ldots\ldots P(A_n \cap B)$$

وباستخدام قانون الضرب نجد أن:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \ldots\ldots \cup P(A_n)P(B/A_n)$$

وحيث إن:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

لذلك فإن:

$$P(Ai/B) = \frac{P(Ai)P(B/Ai)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)PB/A_2)+.......+P(A_n)P(B/A_n)}$$

وهذا ما يعرف بنظرية بيز.

$$P(Ai/B = \frac{P(Ai)P(B/Ai)}{\sum_{i=1}^{n} P(Ai)P(B/Ai)}$$

مثال (21) ـ ثلاث آلات M_1, M_2, M_3 تنتج على الترتيب 50% ,30% ,20% من إنتاج المصنع وكان نسبة المعيب من هذه الآلات على الترتيب 3% ,4% و5%. فإذا اختيرت وحدة من إنتاج هذا المصنع، فما هو احتمال أن تكون الوحدة معيبة؟ وما هو احتمال أن تكون من الآلة M_2 علماً بأنها معيبة.

نفرض أن A حدث، إن الوحدة معيبة

$$P(A) = P(A \cap M_1) + P(A \cap M_2) + P(A \cap M3)$$

$$= P(M_1)\,P(A/M_1) + P(M_2)\,P(A/M_2) + P(M_3)\,P(A/M_3)$$

$$= (0.50)\,(0.03) + (0.30)\,(0.04) + (0.20)\,(0.05)$$

$$= 0.015 + 0.012 + 0.010 = 0.037$$

$$P(M_2/A) = \frac{P(M_2 \bigcap A)}{P(A)} = \frac{P(M_2)P(A/M_2)}{P(A)}$$

$$P(M_2/A) = \frac{0.30 \times 0.04}{0.037} = \frac{0/012}{0.037} = 0.324$$

5 ـ المتغيرات العشوائية وتوزيعات الاحتمالية:

أ ـ تعريف المتغير العشوائي:

إذا ألقينا قطعة نقود متزنة ثلاث مرات فإن فراغ العينة لهذه التجربة هو S حيث:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

فإذا كان اهتمامنا بعدد مرات الحصول على الصورة وربطنا عدم الحصول على الصورة بالعدد (0) وظهور الصورة مرة واحدة بالعدد (1) وظهور الصورة مرتين بالعدد (2) وظهور الصورة ثلاث مرات بالعدد (3) فنقول: إن نتيجة هذه التجربة هي: 0 أو 1 أو 2 أو 3. وإذا رمزنا إلى عدد مرات الحصول على الصورة بالرمز X فإن:

$$X = 0, 1, 2, 3$$

وهذا ما يعرف بالمتغير العشوائي؛ أي أن المتغير العشوائي هو دالة من فراغ العينة (S) إلى فئة الأعداد الحقيقية أو فئة جزئية منها، أو أن المتغير العشوائي هو اقتران حقيقي بين مجموعة الأعداد الحقيقية ونتائج التجربة العشوائية. وعادة ما يرمز للمتغير العشوائي بأحد الحروف الكبيرة X أو Y أو Z ... وهكذا. وإلى القيم التي يأخذها المتغير

بالحروف الصغيرة المناظرة. فمثلاً إذا كان X متغيراً عشوائياً فنقول X يأخذ القيم x1 وx2 وx3 وهكذا إلى xn ويرمز لذلك بالرمز X = x1, x2, x3, ... xn.

ب ـ أنواع المتغيرات العشوائية:

1 ـ المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع):

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ عدداً محدوداً من القيم كما في المثال السابق X = 0, 1, 2, 3. وهو عادة ما ينتج من عدد الأشياء مثل عدد الصور التي نحصل عليها عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات أو أعداد الطلبة بالكليات والمعاهد العليا أو عدد الحوادث التي تقع في إحدى الطرق وغيرها.

2 ـ المتغير العشوائي المتصل (المستمر):

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ عدداً غير محدود من القيم (أي يأخذ قيماً متصلة أو مستمرة في فئة الأعداد الحقيقية أو فئة جزئية منها). وهو عادة ما يكون نتيجة لقياس الأشياء مثل الأطوال أو الأوزان أو الكميات أو الدخل وغيرها. فمثلاً إذا كان X يمثل إنتاج الهكتار الواحد من أحد المحاصيل فإن $X \geqslant 0$ هو متغير عشوائي متصل (مستمر) حيث يأخذ قيماً غير محدودة في الفترة أكبر من صفر.

جـ ـ التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل:

إذا كان X متغيراً عشوائياً منفصلاً يأخذ القيم x1 وx2 وx3 و.... وxn ووجد احتمال لكل قيمة من قيم هذا المتغير العشوائي ووضعت قيم هذا المتغير والاحتمالات المناظرة لها في صورة جدول، فإن هذا الجدول يعرف بجدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي. وعادة ما يرمز إلى احتمال أن المتغير العشوائي (X) يأخذ القيمة (x) بالرمز P(x) حيث P(x) = P(X = x).

والتوزيع الاحتمالي لأي متغير عشوائي منفصل يجب أن يحقق الشرطين التاليين:

$$1 - 0 \leqslant P(x) \leqslant 1 \qquad 2 - \Sigma P(x) = 1$$

فمن المثال السابق فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات الحصول على الصورة عند رمي قطعة نقود متزنة ثلاث مرات هو:

X	0	1	2	3
P(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

ويمكن إيجاد احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ قيمة تزيد أو تقل عن قيمة معينة بالجمع المباشر لاحتمالات قيم المتغير العشوائي في المجال المحدد لذلك. فمثلاً من المثال السابق لرمي قطعة نقود متزنة ثلاث مرات نجد أن:

$$P(X \geqslant 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 3/8 + 1/8 = 4/8 = 1/2 = 0.5$$

$$P(X > 2) = P(X = 3) = 1/8 = 0.125$$

$$P(X < 3) = 1 - P(X \geqslant 3) = 1 - P(X = 3) = 1 - 1/8 = 7/8 = 0.875$$

وقد يكون التوزيع الاحتمالي في صورة دالة (علاقة رياضية) تحدد الشرطين السابقين عند التعويض فيها بجميع قيم المتغير العشوائي، وتعرف بدالة كتلة التوزيع الاحتمالي.

فمثلاً الدالة $P(x) = C_x^4(\frac{1}{2})^4$ هي دالة كتلة التوزيع الاحتمالي المتغير العشوائي X حيث:

$$X = 0, 1, 2, 3, 4$$

$P(x_1) = P(X = 0) = C_0^4(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$ $\quad$ $P(x_2) = P(X = 1) = C_1^4(\frac{1}{2})^4 = \frac{4}{16}$

$P(x_3) = P(X = 2) = C_2^4(\frac{1}{2})^4 = \frac{6}{16}$ $\quad$ $P(x_4) = P(X = 3) = C_3^4(\frac{1}{2})^4 = \frac{4}{16}$

$P(x_5) = P(X = 4) = C_4^4(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$

وتحقق شرطي التوزيع الاحتمالي وهما $1 \geqslant P(x) \geqslant 0$ و $\Sigma P(x) = 1$

وكذلك الدالة $P(x) = \frac{x}{8}$ هي دالة كتلة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X حيث $X = 1, 2, 3$

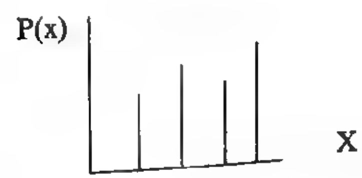
حيث إن: $P(x_2) = P(X = 2) = \frac{2}{6}$ $\quad$ $P(x_1) = P(X = 1) + \frac{1}{6}$

$$P(x_3) = P(X = 3) = \frac{3}{6}$$

وتحقق شرطي التوزيع الاحتمالي وهما $1 \geqslant P(x) \geqslant 0$ و $\Sigma P(x) = 1$

ويمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي المنفصل بيانياً برسم محورين متعامدين وتمثيل قيم المتغير العشوائي على المحور الأفقي وتمثيل الاحتمالات على المحور الرأسي ثم رفع فوق كل قيمة من قيم المتغير عمود بارتفاع الاحتمال المناظر لها كما في الشكل (3 ـ 0):

الشكل (3 ـ 0)



د ـ التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل (المستمر):

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً (مستمراً) في الفترة (∞ ,∞ -) فإن التوزيع الاحتمالي المناظر له يكون على هيئة دالة (علاقة رياضية) P(x) تحقق الشرطين التاليين:

$1 - 0 \leqslant P(x) \leqslant 1$ $\qquad$ $2 - \int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1$

وتعرف بدالة كثافة التوزيع الاحتمالي ومنه يمكن إيجاد احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ قيمة تزيد أو تقل عن قيمة معينة بتكامل دالة التوزيع الاحتمالي في المجال المحدد لذلك. فمثلاً إذا كانت $P_{(x)} = \frac{3}{8}x^2$ تمثل دالة كثافة التوزيع الاحتمالي للمتغير X في المجال $2 \geqslant x \geqslant 0$ حيث:

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{3}{8}x^2dx = \frac{3}{8}\left(\left(\frac{x^3}{3}\right)\right)_0^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{8}{3} - 0\right) = 1$$

وبالتالي فإن

$$P(x = 1) = \int_1^1 \frac{3}{8}X^2 = 0$$

$$P(X \leqslant 1) = P(X < 1) = \int_0^1 \frac{3}{8}X^2 = \frac{3}{8}\left(\left(\frac{x^3}{3}\right)\right)_0^1 = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$P(X \geqslant 0.5) = P(X \geqslant 0.5) = \int_{0.5}^2 \frac{3}{8}X^2 = \frac{3}{8}\left(\left(\frac{x^3}{3}\right)\right)_{0.5}^2 = \frac{3}{8}\left(\left(\frac{8-0.125}{3}\right)\right) = \frac{3}{8}\left(\left(\frac{7.875}{3}\right)\right) = \frac{7.875}{8} = 0.984$$

$$P(0.5 \leqslant X \leqslant 1) = P(X \leqslant 1) - P(X \leqslant 0.5) = 0.125 - (1 - P(X \geqslant 0.5)) = 0.125 - 0.016 = 0.109$$

ويمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي المتصل بمنحنى وذلك برسم محورين متعامدين وتمثيل قيم المتغير العشوائي على المحور الأفقي والاحتمالات على المحور الرأسي ثم وضع نقطة فوق كل قيمة من قيم المتغير العشوائي بارتفاع الاحتمال المناظر لها وتوصيل هذه النقاط بخط ممهد باليد نحصل على المنحنى الاحتمالي لهذا المتغير. فنجد المساحة الكلية تحت المنحنى تمثل مجموع الاحتمالات وبالتالي تساوي الواحد الصحيح.

هـ ـ دالة التوزيع الاحتمالي التراكمي (التجميعي):

إذا كان X متغيراً عشوائياً بدالة كثافة احتمالية f(x) فإن دالة التوزيع الاحتمالي التراكمي لهذا المتغير العشوائي هي احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ قيمة أقل من أو تساوي قيمة معينة ويرمز لها بالرمز $F(X) = P(X \leqslant xi) = \sum_{xi=1}^{x} P_{(x_i)}$ إذا كان المتغير العشوائي منفصلاً (متقطعاً). أي بجمع احتمال لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي مع جميع احتمالات قيم المتغير السابقة لها.

أما إذا كان المتغير العشوائي متصلاً فإن $Fx) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ أي بتكامل دالة كثافة التوزيع الاحتمالي في المجال أقل من قيمة المتغير العشوائي.

فمثلاً من المثال السابق لرمي قطعة نقود متزنة ثلاث مرات نجد أن التوزيع الاحتمالي التراكمي (التجميعي) هو:

X	0	1	2	3
F(X)	1/8	4/8	7/8	8/8

ويمكن تمثيله بيانياً بالشكل (4 ـ 0):

الشكل (4 ـ 0)

وكذلك يمكن تمثيل دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المتصل بيانياً بمنحنى احتمالي.

ومن خواص دالة التوزيع التراكمي ما يلي:

1 ـ دالة التوزيع الاحتمالي التراكمي دالة تزايدية باستمرار أي أنه إذا كان $x1 < x2$ فإن $F(x1) \leqslant F(X2)$

2 ـ $F(x1 < X < x2) = F(x2) - F(x1)$.

و ـ القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي (Expected Value):

إذا كان X متغيراً عشوائياً بدالة كثافة احتمالية فإن القيمة المتوقعة لهذا المتغير العشوائي هي المتوسط الحسابي لهذا المتغير ويرمز له بالرمز $E(X)$ أو μx حيث:

$E(X) = \mu x = \Sigma x f(x)$ إذا كان المتغير العشوائي منفصلاً.

أما إذا كان المتغير العشوائي متصلاً فإن $E(X) = \mu x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

ومن خواص القيم المتوقعة ما يلي:

1 ـ إذا كان a مقداراً ثابتاً فإن:

$$E(a) = a, \qquad E(aX) = a\,E(X)$$

2 ـ إذا كان Y, X متغيرين عشوائيين لكل منهما توزيع احتمالي f(X), f(Y) على الترتيب فإن:

$$E(X \pm Y) = E(X \pm E(Y)$$

3 ـ إذا كان Y, X متغيرين عشوائيين مستقلين فإن: $E(XY) = E(X)\,E(Y)$

مثال (22) ـ إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير (X) هو:

X	1	2	3	4	5	6
P(x)	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

فأوجد القيمة المتوقعة لهذا المتغير العشوائي.

الحل:

$$E(X) = \mu_x = 1\times\frac{1}{36} + 2\times\frac{3}{36} + 3\times\frac{5}{36} + 4\times\frac{7}{36} + 5\times\frac{9}{36} + 6\times\frac{11}{36}$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{15}{36} + \frac{28}{36} + \frac{45}{36} + \frac{66}{36} = \frac{161}{36} = 4.47$$

مثال (23) ـ إذا كانت تكاليف إنتاج قطعة صالحة للبيع في أحد المصانع هي 12 د.ل وأن تكاليف إنتاج قطعة غير صالحة للبيع هي 6د.ل.، وإذا علمت أن احتمال إنتاج قطعة غير صالحة هو 1/6 فما هي القيمة المتوقعة لتكاليف إنتاج القطعة الواحدة بصورة عامة؟

الحل:

نفرض أن X يمثل تكاليف إنتاج القطعة الواحدة، وبالتالي فإن التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير هو:

x	6	12
P(x)	1/6	5/6

$$E(X) = \mu_x = \sum_{i=1}^{2} XiF(Xi) = 6\times\frac{1}{6} + 12\times\frac{5}{6} = \frac{6}{6} + \frac{60}{6} = \frac{66}{6} = 11$$

أي أن التكاليف المتوقعة لإنتاج القطعة الواحدة هي 11 د.ل وبذلك يكون سعر بيع الوحدة الواحدة هو 11 د.ل إذا كان البيع بسعر التكلفة.

مثال (24) ـ إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً بدالة كثافة الاحتمال.

$f(x) = 1/39\, x^2,\ 2 \leqslant x \leqslant 5$. أوجد القيمة المتوقعة لهذا المتغير.

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_2^5 \frac{x^3}{39} dx = \frac{1}{39}\left[\frac{x^4}{4}\right]_2^5 = \frac{1}{39}\left[\frac{625-16}{4}\right] = \frac{1}{39}\left[\frac{609}{4}\right] = 3.9$$

ز ـ التباين والانحراف المعياري:

إذا كان X متغيراً عشوائياً بدالة كثافة احتمالية f(x). وكانت القيمة المتوقعة لهذا المتغير هي μx. فإن تباين هذا المتغير العشوائي يرمز له بالرمز Var.(X) أو $\delta^2 x$

$$\delta^2 x = Var.(X) = E(X - \mu x)^2 = E(X^2) - \mu x^2 = E(X^2) = (E(X))^2$$

حيث $E(X^2) = \Sigma X^2 F(X)$

وبالتالي فإن الانحراف المعياري لهذا المتغير العشوائي يرمز له بالرمز δx حيث إن:

$$\delta_x = \sqrt{V_{ar}(x)} = \sqrt{E(x)^2 - (E(x))^2}$$

ومن خواص التباين:

أ ـ إذا كان (a) مقداراً ثابتاً فإن $Var.(a) = 0;\ Var.(aX) = a^2\, Var.(x)$.

2 ـ إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإن:

$$Var.(X + Y) = Var.(X) + Var.(Y)$$

مثال (25):

أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري للمتغير العشوائي الذي له التوزيع الاحتمالي التالي:

Xi	1	3	4	5
P(Xi)	0.4	0.1	0.2	0.3

$$\mu x = E(X) = \quad x\,f(x) = 1^{*}0.4 + 3^{*}0.1 + 4^{*}0.2 + 5^{*}0.3$$

$$= 0.4 + 0.3 + 0.8 + 1.5 = 3$$

$$E(X^2) = 1^{*}0.4 + 9^{*}0.1 + 16^{*}0.2 + 25^{*}0.3$$

$$= 0.4 + 0.9 + 3.2 + 7.5$$

$$\delta x^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu x^2 = 12 - 9 = 3, \qquad \delta x = \sqrt{3} = 1.7$$

مثال (26) ـ صندوق به 12 وحدة من سلعة معينة، من بينها 4 وحدات معيبة. اختيرت منه عينة عشوائية من ثلاث وحدات واحدة بعد الأخرى بدون إحلال فأوجد:

1 ـ التوزيع الاحتمالي لعدد الوحدات المعيبة.

2 ـ القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لعدد الوحدات المعيبة.

الحل:

نفرض أن (X) يمثل عدد الوحدات المعيبة $X = 0, 1, 2, 3$

$$P(X=0) = \frac{C_0^4 C_3^8}{C_3^{12}} = \frac{4\times 56}{220} = 0.25$$

$$P(X=1) = \frac{C_1^4 C_2^8}{C_3^{12}} = \frac{4\times 28}{220} = 0.51$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^4 C_1^8}{C_3^{12}} = \frac{6\times 8}{220} = 0.22$$

$$P(X=x) = \frac{C_3^4 C_0^8}{C_3^{12}} = \frac{4\times 1}{220} = 0.02$$

التوزيع الاحتمالي لعدد الوحدات المعيبة هو:

Xi	0	1	2	3
P(Xi)	0.25	0.51	0.22	0.02

$$E(X) = \Sigma\, xf(x) = 0^{*}0.25 + 1^{*}0.51 + 2^{*}0.22 + 2^{*}0.02 = 1.01$$

$$E(X^2) = \Sigma\, xf(x) = 0^{*}0.25 + 1^{*}.51 + 4^{*}.22 + 9^{*}0.02 = 1.57$$

$$\delta x^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 1.57 - 1.02 = 0.55$$

$$\delta x = 0.74$$

مثال (27) ـ ألقيت قطعة نقود غير متزنة ثلاث مرات بحيث كان احتمال الحصول على الصورة يساوي ضعف احتمال الحصول على الكتابة. فأوجد:

1 ـ التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الحصول على الصورة.

2 ـ القيمة المتوقعة والتباين لعدد مرات الحصول على الصورة.

الحل:

نفرض X يمثل عدد مرات الحصول على الصورة، فنجد أن $X = 0, 1, 2, 3$.

نفرض H يمثل الحصول على الصورة وT يمثل الحصول على الكتابة وحيث إن $P(H) + P(T) = 1$.

وبالتالي فإن $P(H) + P(T) = 2P(T) + P(T) = 3P(T) = 1$.

ومنها $P(T) = 1/3$ وبالتالي $P(H) = 1 - 1/3 = 2/3$.

$$P(X = 0) = P(TTT) = P(T)\,P(T)\,P(T) = (1/3)^{*}\,(1/3)^{*}\,(1/3) = 1/27 = 0/04$$

$$P(X = 1) = P(HTT) + P(THT) + P(TTH) = 3P(H)\,P(T)\,P(T) = 3^{*}(2/3)^{*}\,(1/3)^{*}\,(1/3)^{*} = 6/27 = 0.22$$

$$P(X = 2) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = 3p(H0\,P(H)\,P(T) = 3^{*}\,(2/3)^{*}\,(2/3)^{*}\,(1/3) = 12/27 = 0.44$$

$$P(X = 3) = P(HHH) = P(H)\,P(H)\,P(H) = (2/3)^{*}(2/3)^{*}(2/3) = 8/27 = 0/30$$

وبالتالي فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير X الذي يمثل عدد مرات الحصول على الصورة يأخذ الشكل التالي:

X	0	1	2	3
P(x)	0.04	0.22	0.44	0.30

$$F(X) = \Sigma\, xf(x) = 0 \times 0.04 + 0^{*}1^{*}0.22 + 2^{*}0.44 + 3^{*}0.30 = 2$$

$$E(X^2) = \Sigma\, x^2 f(x) = 1^{*}.22 + 4^{*}.44 + 9^{*}.30 = 4.68$$

$$Var.(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 4.68 - 4 = 0.68$$

6 ـ بعض أهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة:

أ ـ توزيع ذي الحدين (Binomial Distribution):

يعتبر توزيع ذي الحدين من أهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، وهو يتعلق

بالتجارب العشوائية التي يمكن تقسيم نتائجها إلى حدثين متنافيين، واحتمال الحصول على كل من الحدثين ثابت خلال إجراء التجربة.

فإذا أجرينا تجربة عشوائية n مرة وأمكن تقسيم نتائجها إلى حدثين متنافيين مثل نجاح ورسوب واحتمال الحصول على نجاح ثابتاً خلال إجراء التجربة وليكن P واحتمال الرسوب هو q حيث $q = 1 - P$ فإذا كان X متغيراً عشوائياً يمثل عدد مرات الحصول على نجاح، فإن احتمال الحصول على x نجاح هو:

$$P(x) = C^n_x P^x q^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...n$$

وهذا ما يعرف بتوزيع ذي الحدين. ونلاحظ أن من معالم هذا التوزيع هو P احتمال الحصول على الحدث الذي نبحث فيه وn عدد مرات إجراء التجربة، وبالتالي يرمز لهذا التوزيع بالرمز

$$X \sim B(n, P)$$

ولقد وضعت جداول خاصة لهذا التوزيع فيها تصف احتمال أن المتغير X يأخذ قيمة معينة كما في جدول (1). والبعض الآخر يعطي الاحتمال التراكمي كما هو في جدول (2).

وهناك العديد من الظواهر تتبع في تغيراتها إلى هذا التوزيع مثل نجاح ورسوب، والمعيب وغير المعيب، الحصول على حدث معين أو عدم الحصول عليه، ووجود أخطاء أو عدم وجودها، وغيرها من الأمثلة. وإذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع ذي الحدين فإن $E(X) = \mu x = np \qquad var.(x) = \delta^2 x = npq$

مثال (28) ـ ألقيت قطعة نقود متزنة خمس مرات فأوجد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X الذي يمثل عدد مرات الحصول على الصورة. ثم أوجد القيمة المتوقعة والتباين لعدد مرات الحصول على الصورة.

الحل: .

نفرض X يمثل عدد مرات الحصول على الصورة $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

حيث إن القطعة متزنة وبالتالي فإن احتمال الحصول على الصورة في كل رمية يساوي احتمال الحصول على الكتابة يساوي 0.5 أي أن $P = 0.5, q = 0.5, n = 5$ وبالتالي فإن X يتبع توزيع ذي الحدين

$$P(x) = C^n_x p^x q^{n-x} x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$P(X = 0) = C^5_0 (0.5)0(0.5)5 - 0 = (0.5)5 = .03125$$

$$P(X = 1) = C^5_1 (0.5)^1 (0.5)^{5-1} = 5(0.5)^5 = 0.15625$$

$$P(X = 2) = C^5_2 (0.5)^2 (0.5)^{5-2} = 10(0.5)^5 = .03125$$

$$P(X = 3) = C^5_3 (.5)^3 (0.5)^{5-3} = 10(0.5)^5 = .03125$$

$$P(X = 4) = C^5_4 (.5)^4 (0.5)^{5-4} = 5(0.5)^5 = 0.15625$$

$$P(X = 5) = C^5_5 (.5)^5 (0.5)^{5-5} = (0.5)^5 = 0.03125$$

وبالتالي فإن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X الذي يمثل عدد مرات الحصول على الصورة يكون كما يلي:

X	0	1	2	3	4	5
P(x)	0.03125	0.15625	0.3125	0.3125	0.15625	0.03125

$E(X) = np = 5(0.5) = 2.5 \qquad var.(x) = \delta^2 x = npq = 5(0.5)(0.5) = 1.25$

مثال (29) ـ مصنع ينتج سلعة معينة فإذا علمت أن نسبة الإنتاج غير الصالح من هذه السلعة هو 10% سحبت عينة عشوائية من إنتاج هذا المصنع حجمها 10 وحدات فأوجد:

1 ـ احتمال الحصول على 10 وحدات غير صالحة.

2 ـ احتمال الحصول على أقل من 9 وحدات غير صالحة.

3 ـ القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لعدد الوحدات غير الصالحة.

الحل:

نفرض X يمثل عدد الوحدات غير الصالحة في العينة المسحوبة.

X يتبع توزيع ذي الحدين ب$P = 0.10$ و$n = 10$ و$q = 0.90$.

وبالتالي فإن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X هي:

$$P(x) = C^n_x P^x q^P n - x = 0, 1, 2, 3, ..., 10$$

$$P(x \geqslant 9) = p(X = 9) + P(X = 10)$$

$$= C^{10}_9 (.10)^9 (.9)^{10-9} + C^{10}_{10} (.10)^{10} (.90)^0$$

$$= 10.(0.000000009) + .0000000001 = 0.0000000091$$

$$p(x < 9) = 1 - P(X \geqslant 9) = 1 - 0.0000000091 = 0.999999999$$

$$E(X) = np = 10(0.10) = 1$$

$$var.(x) = \delta^2 x = npq = 10(0.10)(0.90) = 0.90$$

$$\delta x = 0.949$$

مثال (30) ـ صندوق به 4 كرات بيضاء و6 كرات حمراء سحبت من هذا الصندوق 4

كرات عشوائياً واحدة بعد الأخرى بالإحلال. فأوجد:

1 ـ التوزيع الاحتمالي لعدد الكرات البيضاء في العينة المسحوبة.

2 ـ إحتمال أن يكون في العينة أقل من ثلاث كرات بيضاء.

3 ـ القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لعدد الكرات البيضاء.

الحل:

نفرض X يمثل عدد الكرات البيضاء في العينة المسحوبة.

X يتبع توزيع ذي الحدين ب $P = 4/10 = 0.4$ و $q = 6/10 = 0.6$ و $n = 4$.

وبالتالي فإن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هي:

$$P(x) = C^n_x\, p^x q^{n-x} \quad X = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$P(X < 3) = 1 - P(X \geqslant 3) = P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= C^4_3\, (.4)^3 (.6)^{4-3} + C^4_4\, (.4)^4 (.6)^{4-4} = 0.1536 + .0256 = 0.1792$$

$$E(X) = np = 4(0.4) = 1.6 \qquad var.(x) = \delta^2 x = npq = ,\ \delta x = 0.98$$

$$4(0.40)(0.60) = 0.96$$

مثال (31) ـ إذا كان احتمال ولادة الذكور مساوياً لاحتمال ولادة الإناث في أحد المجتمعات، فإذا كان لدينا 800 عائلة من هذا المجتمع لكل عائلة 4 أطفال فأوجد عدد العائلات اللاتي لها ولد واحد على الأقل.

الحل:

نفرض X يمثل عدد الأولاد الذكور في العائلة. X متغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين $P = 0.5$ و $q = 0.5$ و $n = 4$.

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X هي $P(x) = C^n_x\, p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) =$$

$$1 - C^4_0 (.5)^0 (.5)^{4-0} = 1 - 0.0625 = 0.9375$$

عدد العائلات التي لها ولد واحد على الأقل $= 0.9375 \times 800 = 750$

ب ـ توزيع بواسون (Poisson Distribution):

إذا كان X متغيراً عشوائياً يمثل حدثاً معيناً نادر الحدوث في زمن أو مسافة أو مساحة أو حجم معين وبمعدل وليكن (λ). فوجود أن احتمال حدوث هذا الحدث عدد x مرة يتبع العلاقة الاحتمالية التالية:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \alpha$$

وهذا ما يعرف بتوزيع بواسون حيث e أساس اللوغاريتم الطبيعي $e = 2.718$.

λ معدل أو متوسط حدوث الحدث الذي يمثله المتغير العشوائي X في زمن أو مساحة أو مسافة أو حجم معين، وهي المعلمة الوحيدة لهذا التوزيع. لذلك يرمز إلى هذا التوزيع للمتغير العشوائي X الذي يتبع هذا التوزيع بالرمز $X \sim P(\lambda)$.

وهناك عدة ظواهر تتبع في تغيراتها لهذا التوزيع مثل عدد المكالمات الهاتفية التي تستقبلها إحدى البدالات خلال فترة زمنية معينة وعدد حوادث السيارات التي تقع في أحد الطرق وعدد الأخطاء المطبعية في الصفحة الواحدة في أحد الكتب وعدد الزبائن الذين يدخلون محلاً أو مكتباً معيناً خلال فترة زمنية معينة.

وإذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع بواسون بمعدل (λ) فإن $E(X) = \lambda$ و $\delta^2 x = \delta$ و $\delta x = \sqrt{\lambda}$.

وإذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع بواسون بمعدل (δ) فإن $E(X) = (\lambda)$ و $\delta^2 x = \lambda$ و $\delta_x = \sqrt{x}$ وإذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع ذي الحدين وكانت n كبيرة ($n \to \alpha$) و P صغيرة ($P \to 0$) بحيث $np \leqslant 5$ فإنه يمكن تقريب X إلى توزيع بواسون بمعدل ($\lambda = np$). ونلاحظ أن توزيع بواسون موجب الالتواء ويقترب من التماثل بزيادة قيمة λ.

ولقد وضعت جداول خاصة بهذا التوزيع فيها جداول تعطي احتمال أن المتغير X يأخذ قيمة معينة كما في جدول (4). والبعض الآخر يعطي الاحتمال التراكمي للمتغير X كما في جدول (5).

مثال (32) ـ إذا علمت أن معدل المكالمات الهاتفية التي تستقبلها بدالات إحدى الشركات هو مكالمتان كل خمس دقائق.

فأوجد:

1ـ إحتمال عدم استقبال ولا مكالمة هاتفية خلال الخمس دقائق القادمة.

2ـ إحتمال استقبال مكالمة هاتفية واحدة على الأقل خلال الخمس دقائق القادمة.

الحل:

نفرض X يمثل عدد المكالمات الهاتفية التي تستقبلها هذه البدالة خلال الخمس دقائق القادمة.

X يتبع توزيع بواسون بمعدل $\lambda = 2$ والتالي فإن دالة كثافة هذا المتغير هي:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x1} \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4, ..., \alpha$$

$$P(X = 0) = \frac{e^2 2^0}{0!} = e2 = 0.135$$

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.135 = 0.865$$

مثال (33) ـ إذا علمت أن معدل عدد الحوادث التي تقع في الطريق الدائري هو 8 حوادث شهرياً فأوجد:

1 ـ إحتمال وقوع أكثر من حادث واحد خلال الشهر القادم.

2 ـ القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لعدد الحوادث التي يمكن أن تقع في هذا الطريق خلال الشهر القادم.

الحل:

نفرض X تمثل عدد الحوادث التي يمكن أن تقع في هذا الطريق خلال الشهر.

X يتبع توزيع بواسون بمعدل λ = 8 وبالتالي فإن دالة كثافة هذا المتغير هي:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x1} \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4, ..., \alpha$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leqslant 1) - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$

$$= 1 - \frac{(e^{-8}8^0}{0!} - \frac{e^{-8}\ 8}{1!} = 1 - (0.00034 + 0.00268) = 1 - 0.00302 = 0.997$$

$$E(X) = \lambda = 8 \qquad \delta x = \sqrt{\lambda} = 2.828$$

مثال (34) ـ إذا كانت نسبة الإنتاج المعيب من إنتاج أحد المصانع هي 1% وكانت هذه السلعة تعبأ في صناديق كل صندوق يسع 300 وحدة، فأوجد احتمال أن يكون في أحد هذه الصناديق 3 وحدات معيبة.

الحل:

نفرض X يمثل عدد الوحدات المعيبة في كل صندوق من هذه الصناديق.

X يتبع توزيع ذي الحدين P = 0.01 وn = 300 وحيث P صغيرة وn كبيرة يمكن تقريب توزيع ذي الحدين إلى توزيع بواسون بمعدل λ = np = 300*0.01.

$$P(x = 3) = \frac{e^{-3}3^3}{3!} = \frac{0.05 \times 27}{6} = 0.224$$

7 ـ بعض أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة:

أ ـ التوزيع المنتظم (Uniform distribution):

يعتبر التوزيع المنتظم من أبسط التوزيعات الاحتمالية المتصلة في الفترة [a, b] حيث b, a عددان حقيقيان.

فإذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً في الفترة [a, b] لكل قيم $-\infty < a < b < \infty$.

فإن الدالة الاحتمالية لهذا المتغير $f(x) = \frac{1}{b-a}$ هي لكل قيم $a \leqslant x \leqslant b$

وإذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع هذا التوزيع فإن:

$$\mu_x = E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\delta_x^2 = Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\delta_x = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

مثال (35) ـ سحبت عينة عشوائية من جدول الأعداد العشوائية لكل القيم بين [0, 99] فأوجد:

1 ـ إحتمال أن يكون الرقم أكبر من 50.

2 ـ متوسط هذه الأرقام والانحراف المعياري لها.

نفرض X يمثل الرقم العشوائي المسحوب.

X يتبع التوزيع المنتظم b = 99, a = 0

$$f(x) = \frac{1}{99-0} = \frac{1}{99} .... a \leqslant X \leqslant b$$

$$P(X > 50) = \int_{50}^{99} \frac{1}{99} dx = \frac{1}{99}[x]_{50}^{99} = \frac{1}{99} p99 - 50] = \frac{49}{99} = 0.50$$

$$\mu_x = E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+00}{2} = \frac{99}{2} = 49.5$$

$$\delta_x^2 = Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(99-0)^2}{12} = \frac{9801}{12} = 816.75 - 2$$

$$\delta_x = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \sqrt{816.75} = 28.579$$

ب ـ التوزيع الأسي:

إذا كان X متغيراً عشوائياً بدالة كثافة التوزيع الاحتمالي

$$f(x) = \lambda . e^{-\lambda x} .... x \geqslant 0, \lambda > 0$$

فإذا X يعرف دالة التوزيع الأسي وبالتالي:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda} .... \delta^2 = Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

مثال (36):

إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الأسي بمتوسط μ = 2 فأوجد P(X > 1), P(X < 2)

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda} = 2 .... \lambda = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots x \geqslant 0$$

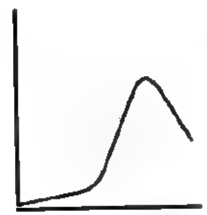
$$P(x<2) = \int_0^2 \frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}dx = \left[-e^{\frac{-x}{2}}\right]_0^2 = 1 - e^{-1} = 1 - 0.368 = 0.632$$

$$P(x<2) = \int_1^{\infty} \frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}dx = \left[-e^{\frac{-x}{2}}\right]_0^2 = e^{-1} - 0 = 0.368$$

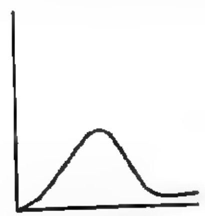
جـ ـ التوزيع الطبيعي (Normal distribution):

إذا كانت لدينا بيانات حول ظاهرة معينة ورسمنا المنحنى التكراري لهذه الظاهرة فغالباً ما يكون الشكل العام لهذا المنحنى يأخذ أحد الأشكال (5 ـ 0) (6 ـ 0) (7 ـ 0):

شكل (5 ـ 0)



شكل (6 ـ 0)



شكل (7 ـ 0)

ونلاحظ في الشكل (5 ـ 0) أن معظم المفردات تركزت عند القيم الصغرى للظاهرة لذلك صعد المنحنى بسرعة وهبط ببطء وهذا ما يعرف بالمنحنى الملتوي إلى اليمين. وفي الشكل (6 ـ 0) نلاحظ أن معظم المفردات تركزت عند القيم الكبرى للظاهرة لذلك صعد المنحنى ببطء وهبط بسرعة وهذا ما يسمى بالمنحنى الملتوي إلى اليسار. أما في الشكل (7 ـ 0) فنلاحظ أن معظم المفردات تركزت عند القيم الوسطى للظاهرة وتقل تدريجياً من الطرفين كلما بعدنا عن هذه القيم لذلك أخذ المنحنى شكل الجرس، وعند إسقاط عمود من قمة المنحنى على المحور الأفقي يقسم المنحنى إلى قسمين متساويين وهذا ما يعرف بالمنحنى المتماثل أو المنحنى المعتدل حيث يعرف توزيعه الاحتمالي بالتوزيع المعتدل أو التوزيع الطبيعي وهو من أشهر التوزيعات الاحتمالية المتصلة حيث وجد أن معظم الظواهر الطبيعية تتبع في تغيراتها لهذا التوزيع. كما يمكن تقريب بعض التوزيعات الأخرى إلى صورة التوزيع الطبيعي تحت ظروف معينة.

وتعرف دالة التوزيع الطبيعي أو دالة كثافة التوزيع الطبيعي لهذا المتغير بالمعادلة التالية:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2}} - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots -\infty < X < \infty$$

حيث μ هي متوسط التوزيع $-\infty < \mu < \infty$

σ هي الانحراف المعياري للتوزيع $\sigma > 0$

أما π, e فهي ثوابت حيث $e = 2.718$ $\pi = 3.14$.

لذلك فإن μ ,σ هما معالم التوزيع الطبيعي. حيث بمعرفة μ ,σ لأي متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي يكون في الإمكان حساب الاحتمالات المختلفة لهذا المتغير وذلك باستخدام العلاقة الاحتمالية السابقة.

وإذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين δ^2 فيرمز له بالرمز $X \sim N(\mu, \delta^2)$ ومن خواص التوزيع الطبيعي ما يلي:

1 ـ المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع تساوي واحداً أي مجموع الاحتمالات في التوزيع يساوي الواحد الصحيح أي $\int f(x)dx = 1$

2 ـ دالة كثافة للتوزيع الطبيعي متماثلة حول المتوسط الحسابي. أي أنه عند إسقاط عمود من قمة المنحنى على المحور الأفقي فإن هذا العمود يقسم المنحنى إلى جزئين متماثلين ويعين متوسط الظاهرة على المحور الأفقي وبالتالي فإن:

$$1 - P(-\infty < X < \mu) = p(\mu < X < \infty) = 0.5$$

أي 50% من المساحة الكلية تحت المنحنى محصورة بين μ و ∞

$$2 - p(\mu - \delta < X < \mu + \delta) = 0.6829$$

أي 68.28% محصورة بين المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع $\mu - \delta$ و $\mu + \delta$

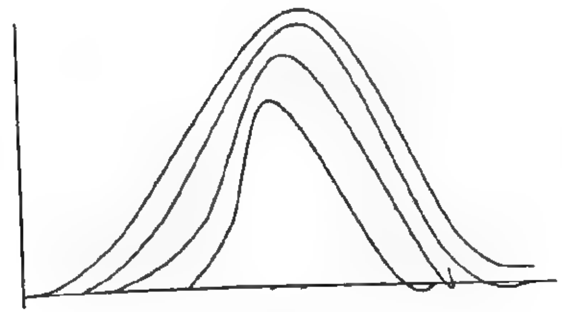
$$3 - p(\mu - 2\delta < X < \mu + 2\delta) = 0.9545$$

أي 95.45% من المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع محصورة بين $\mu - 2\delta$ و $\mu + 2\delta$

$$4 - p(\mu - 3\delta < X < \mu + 3\delta) = 0.9973$$

أي 99.73% محصورة المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع $\mu - 3\delta$ و $\mu + 3\delta$

وحيث إن الظواهر الطبيعية تختلف في متوسطاتها وتبايناتها اختلافاً لا نهائياً حتى وإن كانت متساوية في المتوسطات فقد تختلف في التباينات، وإذا كانت متساوية في التباينات فقد تختلف في المتوسطات. فالشكل (8 ـ 0) يوضح منحنيات طبيعية لها نفس المتوسط مع اختلافها في تبايناتها.



شكل (8 ـ 0)

في حين الشكل (9 ـ 0) يوضح منحنيات طبيعية لها نفس التباين ولكنها تختلف في متوسطاتها.

شكل (9 ـ 0)

ولكن يمكن تحويل أي متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين δ^2 إلى متغير آخر يتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط يساوي صفراً وتباين يساوي الواحد الصحيح ويعرف بالمتغير الطبيعي المعياري ويرمز له بالرمز Z

حيث:

$$Z = \frac{x-\mu}{\delta} \sim N(0,1)$$

وبذلك تكون دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير تأخذ المعادلة التالية:

$$P(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty < Z < \infty$$

ومن خواص التوزيع الطبيعي المعياري ما يلي:

1 ـ المساحة الكلية تحت منحنى الدالة تساوي واحداً (مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح).

2 ـ دالة كثافة التوزيع الطبيعي المعياري متماثلة حول الصفر أي أن:

$1 - P(-\infty < Z < 0) = p(0 < Z < \infty) = 0.5$

أي 50% من المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع المعياري محصورة بين 0 و ∞

$2 - p(-1.96 \leqslant X \leqslant 1.96) = 0.95$

أي أن 95% من المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري تقع بين 1.96، ‎-1.96

$3 - P(-2.58 \leqslant X \leqslant 2.58) = 0.99$

أي أن 99% من المساحة الكلية تحت منحني التوزيع الطبيعي المعياري تقع بين 2.58، ‎-2.58

لذلك وضعت جداول خاصة لهذا التوزيع. تعطي احتمال أن المتغير العشوائي المعياري يأخذ قيمة محصورة بين الصفر وقيمة المتغير. والبعض الآخر يعطي احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي المعياري قيمة أقل من قيمة معيارية معينة (بين ∞ ـ وقيمة المتغير) كما في الجدول (7).

وفي هذه الجداول نجد أن العمود الأول فيه القيم المختلفة لقيم المتغير المعياري (العدد الصحيح والقيمة الأولى بعد الفاصلة). في حين في الصف الأول فيه القيم المختلفة لقيم المتغير المعياري للعدد الثاني بعد الفاصلة.

فمثلاً للبحث في $P(Z < 1.58)$ من الجدول الذي يعطي احتمال أن المتغير المعياري يأخذ قيمة أقل من قيمة معيارية معينة، نبحث عن 1.5 في العمود الأول وتحت 0.08 في الصف الأول؛ فالقيمة المناظرة هي المساحة المطلوبة وتساوي 0.9429 بالتالي فإن $P(Z < 1.58) = 0.9429$.

أما للبحث عن $P(Z > 0.15)$ من نفس الجدول فنغير أولاً العلامة من أكبر إلى أقل باستخدام إحدى الطريقتين التاليتين $P(Z < -0.15)$ أو $1 - P(Z < 0.15)$، لاستخدام الطريقة الأولى ثم نبحث في الجدول عن القيمة المناظرة لـ (0.1 ـ) في العمود الأول تحت (0.05) في الصف الأول وهي 0.4404. وفي حالة استخدام الطريقة الثانية نبحث في الجدول عن القيمة المناظرة لـ (0.1) في العمود الأول وتحت (0.05) في الصف الأول وهي 0.5596 ثم نطرح الناتج من الواحد الصحيح فنحصل على 0.4404 وهي نفس النتيجة الأولى أي أن $P(Z > 0.14) = 0.4404$.

أما للبحث عن $P(1.24 < Z < 2.08)$ فنجد أن:

$$P(1.24 < Z < 2.08) = P(Z < 2.08) - P(Z < 1.24) = 0.9812 - 0.8925 = 0.887$$

وكذلك يمكن استخدام هذه الجداول لإيجاد القيمة المعيارية $Z\alpha$ التي تحقق $p(Z < \alpha) = \alpha$ عندما تكون لدينا معلومة. بالبحث في الجدول على أقرب قيمة للاحتمال α ثم نحدد قيمة Z المناظرة لها ونساويها ب $Z\alpha$.

فمثلاً لإيجاد قيمة $Z\alpha$ التي تحقق $p(Z < Z\alpha) = 0.2845$ نبحث في لاجدول عن أقرب قيمة للاحتمال وهي 0.2845 ثم نحدد قيمة Z المناظرة لها وهي (0.57 -) ونساويها ب $Z\alpha$ أي أن $Z\alpha = -0.57$.

يمكن إيجاد احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين δ^2 أية قيمة بعد تحويل المتغير إلى الصورة المعيارية وذلك بطرح المتوسط من القيمة الأصلية للمتغير وقسمة الناتج على الانحراف المعياري.

وفي ما يلي أمثلة تطبيقية على استخدامات هذا التوزيع.

مثال (37) ـ إذا كان توزيع درجات طلبة هذا الفصل في الامتحان الأول لمادة الإحصاء يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 70 درجة وانحراف معياري قدره 10 درجات. فإذا تم اختيار طالب عشوائياً من طلبة هذا الفصل فأوجد:

1 ـ إحتمال أن يكون الطالب المختار درجته أكثر من 80 درجة.

2 ـ إحتمال أن يكون الطالب المختار درجته أقل من أو تساوي 75 درجة.

3 ـ إحتمال أن يكون الطالب المختار درجته محصورة بين 75، 80 درجة.

الحل:

نفرض X تمثل درجة الطالب المختار. X يتبع التوزيع الطبيعي ب $\mu = 70$ و $\delta = 10$.

حيث إنه لا يمكن إيجاد الاحتمالات المطلوبة من الجداول إلا بعد تحويل القيم الأصلية إلى قيم معيارية ثم البحث في الجدول فنجد أن:

$$P(X>80) = P(\frac{X-\mu}{\delta} > \frac{80-70}{10}) = P(Z>1)$$

$$= 1 - P(Z\leqslant 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

$$P(X\leqslant 75) = P(\frac{X-\mu}{\delta} \leqslant \frac{75-70}{10}) = P(Z\leqslant 0.5) = 0.6915$$

$$P(75<X<80) = P(\frac{75-70}{10} < \frac{X-\mu}{\delta} < \frac{80-70}{10})$$

$$= P(\tfrac{1}{2}<Z<1) = P(Z\leqslant 1) - P(Z\leqslant 0.5) = 0.8413 - 0.6915 = 0.5668$$

مثال (38) ـ مصنع ينتج الأسلاك الكهربائية بمقاومة متوسطة 40 واتاً وانحراف معياري 2 واتاً، فإذا كانت مقاومة الأسلاك الكهربائية التي ينتجها هذا المصنع تتبع التوزيع الطبيعي فما هي نسبة الأسلاك الكهربائية التي تزيد مقاومتها عن 43 واتاً؟

الحل:

نفرض X تمثل مقاومة الأسلاك الكهربائية المنتجة. X يتبع التوزيع الطبيعي ب $\mu = 40$ و $\delta = 2$

$$P(X>43) = P(\frac{X-\mu}{\delta} > \frac{37-40}{2}) = P(Z> -\frac{3}{2})$$

$$= P(Z> -1.5) = P(Z\leqslant +1.5) = 0.5668$$

مثال (39) ـ إذا كان عدد المعاملات التي يقوم بها المصرف التجاري في الأسبوع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 3500 معاملة وانحراف معياري قدره 200 معاملة فأوجد

1 ـ إحتمال أن يقوم بأكثر من 3500 معاملة خلال الأسبوع القادم.

2 ـ إحتمال أن يقوم بعدد من المعاملات تتراوح بين 3300، 3900 معاملة.

3 ـ إحتمال أن يقوم بأقل من 2900 معاملة.

الحل:

نفرض X تمثل عدد المعاملات التي يقوم بها المصرف التجاري في الأسبوع X يتبع التوزيع الطبيعي ب $\mu = 3500$ و $\delta = 200$.

$$1 - P(X>3500) = P(Z> \frac{3500-3500}{200}) = P(Z>0)$$

$$= P(X > 3500) = P(Z > 0) = P(Z < 0) = 0.5$$

$$2 - P(3300<X<3900) = P(\frac{3300-3500}{200} < Z < \frac{3900-3500}{200})$$

$$= P(-1<Z<2) = P(Z<2) - P(Z< -1) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$$

$$3 - P(X<2900) = P(Z< \frac{P2900-3500}{200}) = P(Z< -3) = 0.0013$$

مثال (40) ـ إذا علمت أن المصاريف الشهرية لمنشأة ما تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 2000 د. ل وانحراف معياري 100 د. ل، فإذا كانت الميزانية المحددة للشهر القادم لهذه المنشأة هي 2200 د. ل فما احتمال أن المصاريف الشهرية تزيد عن هذه الميزانية المحددة؟ وإذا أرادت اللجنة الشعبية لهذه المنشأة أن تجعل احتمال زيادة المصاريف عن الميزانية التي تحددها للشهر القادم لا تتعدى 10% فما هو المقدار الذي يجب أن تقترحه للميزانية حتى يحقق عرضها هذا؟

الحل:

نفرض X تمثل المصاريف الشهرية لهذه المنشأة. X يتبع التوزيع الطبيعي ب $\mu = 3500$ و $\delta = 200$

$$P(X>2200) = P(\frac{X-\mu}{\delta} > \frac{2200-2000}{100}) = P(Z>2)$$

$$= 1 - P(Z \leqslant 2) = 1 - 0.9773 = 0.0227$$

نفرض A تمثل الميزانية المحددة للشهر القادم وبالتالي فإن:

$$P(X > A) = 0.10$$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\delta} > \frac{A-2000}{100}\right) = 0.10$$

$$= 1 - P\left(Z < \frac{A-2000}{100}\right) = 0.10$$

$$= P\left(Z < \frac{A-2000}{100}\right) = 0.90$$

$$1.28 = \frac{A-2000}{100}$$

$$A = 2000 + 128 = 2128$$

مثال (41) ـ إذا كان الطلب الأسبوعي على سلعة معينة في أحد الأسواق يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 200 وحدة وانحراف معياري 20 وحدة فإذا كان تزويد السوق يأخذ أسبوعاً لتصل من المخازن إلى السوق فما هو أقل عدد من هذه السلعة يجب أن تكون لدى السوق قبل طلب تزويده من المخازن حتى يكون احتمال أن لا ينفذ ما لديه من هذه السلعة قبل وصول التزويد هو 95%؟

الحل:

نفرض X هو عدد الوحدات المطلوبة. X يتبع التوزيع الطبيعي ب 200 = μ و δ = 20 .

نفرض A يمثل ما لدى السوق قبل طلب تزويديه من المخازن.

لكي لا ينفذ ما لدى السوق يجب أن يكون الطلب أقل من عدد الوحدات التي لدى السوق أي أن:

$$P(X < A) = 0.95$$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\delta} < \frac{A-200}{20}\right) = 0.95$$

$$P\left(Z < \frac{A-200}{20}\right) = 0.95$$

$$P(Z < 1.64) = 0.95$$

$$\frac{A-200}{20} = 1.64$$

$$A - 200 = 20*1.64$$

$$A = 200 + 33 = 233$$

عليه يجب على السوق أن يطلب تزويده من المخازن بهذه السلعة إذا وصل ما لديه 233 وحدة.

مثال (42) ـ إذا كان توزيع رواتب المنتجين في أحد الصمائع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 100 وتباين قدره 9 فأوجد عدد المنتجين الذين تتراوح رواتبهم بين 91 و106 إذا كان عدد المنتجين في هذا المصنع 8000 منتج.

نفرض X تمثل رواتب المنتجين في هذا المصنع. X يتبع التوزيع الطبيعي ب μ = 100 و δ = 3

$$P(91 < X < 106) = P\left(\frac{91-100}{3} < Z < \frac{106-100}{3}\right)$$

$$P(9 < X < 106) = P - (-3 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -3)$$

$$= P(Z < 2) - P(Z < 2) - [1 - P(Z < 3)]$$

$$= 0.9772 - [1 - 0.9987] = 0.9772 - [0.0013] = 0.89759$$

عدد المنتجين الذين تتراوح رواتبهم بين 19 و106 = $\frac{0.9759 \times 8000}{10000} = 7807$

مثال (43) ـ إذا كان عمر المصابيح الكهربائية التي تنتجها أحد المصانع يتبع التوزيع الطبيعي وكان 92.5% من المصابيح يزيد عمرها عن 2160 ساعة بينما 3.92% من المصابيح يزيد عمرها عن 17040. أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لعمر هذه المصابيح.

الحل:

نفرض X تمثل عمر المصابيح المنتجة. X يتبع التوزيع الطبيعي.

$$P(X > 2160) = 0.9325$$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\delta} > \frac{2160-\mu}{\delta}\right) = 0.925$$

$$P\left(Z \leqslant -\frac{2160-\mu}{\delta}\right) = 0.925$$

$$P(Z \leqslant 1.44) = 0.925$$

$$\therefore 1.44 = -\frac{2160-\mu}{\delta}$$

$$-1.44\delta = 2160 - \mu$$

$$\therefore \mu = 2160 + 1.44\delta .... (1)$$

$$P\left(X > \frac{17040-\mu}{\delta}\right) = 0.0392$$

$$= 1 - P\left(Z \leqslant \frac{17040-\mu}{\delta}\right) = 0.0392$$

$$P\left(Z \leqslant \frac{17040-\mu}{\delta}\right) = 1 - 0.0392 = 0.9608$$

$$P(Z \leqslant 1.76) = 0.9608$$

$$\therefore 1.76 = \frac{17040-\mu}{\delta}$$

$$\delta = \frac{17040-\mu}{1.76} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\therefore \mu = 2160 + 1.44\left(\frac{17040-\mu}{1.76}\right) = 2160 + 13941.818 - 0.818\mu$$

$$1.818\mu = 16101.818$$

$$\mu = \frac{16101.818}{1.818} = 8856.886$$

$$\therefore \delta = \frac{17040-8856.886}{1.76} = \frac{8183.1144}{1.76} = 4649.497$$

مثال (44) ـ إذا علم أن حجم البدل التي ينتجها أحد المصانع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 38 وانحراف معياري 3 فاحسب الأعداد التي يجب أن ينتجها من الأحجام ما بين 34 و36 إذا أراد أن ينتج 2000 قطعة.

الحل:

نفرض X تمثل حجم البدل التي ينتجها هذا المصنع. X يتبع التوزيع الطبيعي ب $\mu = 38$ و $\delta = 3$.

$$P(34 \leqslant X \leqslant 36) = P\left(\frac{34-38}{3} \leqslant \frac{36-38}{3}\right) = P(-1.33 \leqslant Z \leqslant -0.67)$$

$$= P(0.67 \leqslant Z \leqslant 1.33) = P(Z<1.33) - P(Z \leqslant 0.67) = 0.9082 - 0.7486 = 0.1596$$

عدد البدل التي يجب أن ينتجها هذا المصنع من الحجم (34 ـ 36) = 2000 x 0.1596 = 319.

تقريب توزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي:

إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع ذي الحدين وكانت n كبيرة، p تقترب إلى النصف فيمكن تقريب X إلى التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = np$ وتباين $\delta^2 = npq$ وبالتالي فإن:

$$Z = \frac{X-nP}{\sqrt{npq}} \ldots \approx N(0,1)$$

بعد إيجاد القيمة الحقيقية لقيمة X:

مثال (45) ـ إذا كانت نسبة المعيب من إنتاج آلة معينة هي 10% يحبت عينة عشوائية من 100 وحدة من إنتاج هذه الآلة فأوجد احتمال أن تكون في العينة أقل من 13 وحدة معيبة.

الحل:

نفرض X يمثل عدد الوحدات المعيبة في العينة $X = 0, 1, 2, \ldots, 100$

X يتبع توزيع ذي الحدين ب$n = 100$, $P = 0.10$.

وحيث إن n كبيرة، P تقترب من النصف لذلك فإن X يقترب إلى التوزيع الطبيعي

ب.

$$\mu = np = 100 \times 0.10 = 10$$

$$\delta = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \times 0.1 \times 0.90} = 3$$

$$P(X<13) = P\left(Z<\frac{13.5-10}{3}\right) = P(Z<1.16) = 0.1216$$

$$P(X \geqslant 13) = P\left(Z>\frac{12.5-10}{3}\right) =$$

تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي:

إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع بواسون وكانت λ كبيرة فإنه يمكن تقريب X إلى التوزيع الطبيعي.

بمتوسط $\mu = \lambda$ وتباين $\delta^2 = \lambda$ وبالتالي فإن: $Z = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \ldots\ldots \approx N(0,1)$

بعد إيجاد القيمة الحقيقية لقيمة X:

مثال (46) ـ إذا كان متوسط عدد المكالمات الهاتفية التي تستقبلها بدالة إحدى الشركات هو 50 مكالمة في الساعة. فما احتمال أن تستقبل أكثر من 40 مكالمة في إحدى الساعات؟

الحل:

نفرض X يمثل عدد المكالمات التي تستقبلها هذه البدالة في الساعة $X = 0, 1, 2, \ldots \infty$

X يتبع توزيع بواسون ب $\lambda = 50$

وحيث إن λ كبيرة فيمكن تقريب X إلى التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 50$, $\delta^2 = 50$ وبالتالي:

$$P(X>40) = P\left(Z>\frac{40.5-50}{7.07}\right) = P(Z>-1.34) = P(Z<1.34) = 0.9099$$

الجداول

جدول رقم (1)
احتمالات توزيع ذي الحدين

$C_x^n P^x q^P n - x, x = 0.1, 2 \ldots\ldots\ldots n$

$n = 2, 3, 4 \ldots, 10$

$P = 0.01, 0.05(0.05)\ 0.30, 1/3, \quad 0.35\ (0.05)\ 0.50, P = 0.49$

n	x	p .01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	1/3	.35	.40	.45	.49	.50
2	0	.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4444	.4225	.3600	.3025	.2601	[illegible]
	1	.0198	[illegible]	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4444	.4550	.4800	.4950	.4998	[illegible]
	2	.0001	[illegible]	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1111	.1225	.1600	[illegible]	.2401	[illegible]
3	0	.9703	.8574	.7290	[illegible]	.5120	.4219	.3430	.2963	.2746	.2160	.1664	.1327	.1250
	1	.0294	[illegible]	.2430	[illegible]	.3840	.4219	[illegible]	.4444	.4436	.4320	.4084	.3823	.3750
	2	.0003	.0071	.0270	.0574	[illegible]	.1406	[illegible]	.2222	.2389	.2880	.3341	[illegible]	.3750
	3	[illegible]	[illegible]	.0010	[illegible]	.0080	[illegible]	.0270	.0370	.0429	.0640	.0911	.1176	.1250
4	0	.9606	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1975	.1785	.1296	[illegible]	.0677	.0625
	1	[illegible]	[illegible]	.2916	.3685	.4096	.4219	[illegible]	.3951	.3845	.3456	.2995	.2600	.2600
	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.0975	[illegible]	.2109	[illegible]	.2963	.3105	.3456	[illegible]	.3747	.0050
	3	[illegible]	[illegible]	.0036	.0115	.0256	[illegible]	.0736	.0988	.1115	.1536	.2005	.2400	.2500
	4	[illegible]	[illegible]	.0001	.0005	[illegible]	.0039	.0081	.0123	.0150	.0266	.0410	.0576	.0625
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1317	.1160	.0778	.0503	.0345	.0312
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	[illegible]	.3955	.3602	.3292	.3124	.2592	.2059	.1657	.1562
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3292	.3364	.3456	.3369	.3185	[illegible]
	3	[illegible]	.0316	.0081	.0244	[illegible]	.0879	.1323	.1646	.1811	.2304	.2757	.3060	.3125
	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.0022	.0064	.0145	.0284	.0412	.0488	.0768	.1128	.1470	.1562
	5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.0001	[illegible]	.0010	.0024	.0041	.0053	.0102	.0185	[illegible]	.0312
6	0	.9415	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0878	.0754	.0467	.0277	.0176	.0156
	1	.0571	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2634	.2437	.1866	.1359	.1014	.0938
	2	.0014	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3292	.3280	.3110	.2780	.2437	.2344
	3	.0000	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2195	.2355	.2765	.3032	.3121	.3125
	4	.0000	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0823	.0951	.1382	.1861	.2249	.2344
	5	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0165	.0205	.0369	.0609	.0864	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0014	.0018	.0041	.0083	.0139	.0156

تابع الجدول رقم (1)

n	x													
7	0	.9321	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0585	.0490	.0280	.0152	.0090	.0078
	1	.0659	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.2048	.1848	.1306	.0872	.0603	.0547
	2	.0020	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.3073	.2985	.2613	.2140	.1740	.1641
	3	.0000	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2561	.2679	.2903	.2918	.2786	.2734
	4	.0000	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1280	.1442	.1935	.2388	.2676	.2734
	5	.0000	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0384	.0466	.0774	.1172	.1543	.1641
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0064	.0084	.0172	.0320	.0494	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0006	.0015	.0037	.0068	.0078
8	0	.9227	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0390	.0319	.0168	.0084	.0046	.0039
	1	.0746	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1561	.1373	.0896	.0548	.0352	.0312
	2	.0026	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2731	.2587	.2090	.1569	.1183	.1094
	3	.0001	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2731	.2786	.2787	.2568	.2273	.2188
	4	.0000	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1707	.1875	.2322	.2627	.2730	.2734
	5	.0000	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0683	.0808	.1239	.1719	.2098	.2188
	6	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0171	.0217	.0413	.0703	.1008	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0024	.0033	.0079	.0164	.0277	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0002	.0007	.0017	.0033	.0039
9	0	.9135	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0260	.0207	.0101	.0046	.0023	.0020
	1	.0830	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1171	.1004	.0605	.0339	.0202	.0176
	2	.0034	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2341	.2162	.1612	.1110	.0776	.0703
	3	.0001	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2731	.2716	.2508	.2119	.1739	.1641
	4	.0000	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2048	.2194	.2598	.2600	.2506	.2461
	5	.0000	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1024	.1181	.1672	.2128	.2408	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0341	.0424	.0743	.1160	.1542	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0073	.0098	.0212	.0407	.0635	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0009	.0013	.0035	.0083	.0153	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0003	.0008	.0016	.0020
10	0	.9044	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0173	.0135	.0060	.0025	.0012	.0010
	1	.0914	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0867	.0725	.0403	.0207	.0114	.0098
	2	.0042	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1951	.1757	.1209	.0763	.0495	.0439
	3	.0001	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2601	.2522	.2150	.1665	.1267	.1172
	4	.0000	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2276	.2377	.2508	.2384	.2130	.2051
	5	.0000	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1366	.1536	.2007	.2340	.2456	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0569	.0689	.1115	.1596	.1966	.2051
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0163	.0212	.0425	.0746	.1060	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0030	.0043	.0106	.0229	.0389	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0005	.0016	.0042	.0083	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0010

جدول رقم (2)

دالة التوزيع التراكمية لتوزيع ذي الحدين

$$\sum_{r=0}^{x} C_r^n \, p^r q^{n-r}$$

n	x	p .10	.20	.25	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
1	0	.9000	.8000	.7500	.7000	.6000	.5000	.4000	.3000	.2000	.1000
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	.8100	.6400	.5625	.4900	.3600	.2500	.1600	.0900	.0400	.0100
	1	.9900	.9600	.9375	.9100	.8400	.7500	.6400	.5100	.3600	.1900
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	.7290	.5120	.4219	.3430	.2160	.1250	.0640	.0270	.0080	.0010
	1	.9720	.8960	.8438	.7840	.6480	.5000	.3520	.2160	.1040	.0280
	2	.9990	.9920	.9844	.9730	.9360	.8750	.7840	.6570	.4880	.2710
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	.6561	.4096	.3164	.2401	.1296	.0625	.0256	.0081	.0016	.0001
	1	.9477	.8192	.7383	.6517	.4752	.3125	.1792	.0837	.0272	.0037
	2	.9963	.9728	.9492	.9163	.8208	.6875	.5248	.3483	.1808	.0523
	3	.9999	.9984	.9961	.9919	.9744	.9375	.8704	.7599	.5904	.3439
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	.5905	.3277	.2373	.1681	.0778	.0312	.0102	.0024	.0003	.0000
	1	.9185	.7373	.6328	.5282	.3370	.1875	.0870	.0308	.0067	.0005
	2	.9914	.9421	.8965	.8369	.6826	.5000	.3174	.1631	.0579	.0086
	3	.9995	.9933	.9844	.9692	.9130	.8125	.6630	.4718	.2627	.0815
	4	1.0000	.9997	.9990	.9976	.9898	.9688	.9222	.8319	.6723	.4095
	5		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	.5314	.2621	.1780	.1176	.0467	.0156	.0041	.0007	.0001	.0000
	1	.8857	.6554	.5339	.4202	.2333	.1094	.0410	.0109	.0016	.0001
	2	.9841	.9011	.8306	.7443	.5443	.3438	.1792	.0705	.0170	.0013
	3	.9987	.9830	.9624	.9295	.8208	.6563	.4557	.2557	.0989	.0159
	4	.9999	.9984	.9954	.9891	.9590	.8906	.7667	.5798	.3447	.1143
	5	1.0000	.9999	.9998	.9993	.9959	.9844	.9533	.8824	.7379	.4686
	6		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0	.4783	.2097	.1335	.0824	.0280	.0078	.0016	.0002	.0000	
	1	.8503	.5767	.4449	.3294	.1586	.0625	.0188	.0038	.0004	.0000
	2	.9743	.8520	.7564	.6471	.4199	.2266	.0963	.0288	.0047	.0002
	3	.9973	.9667	.9294	.8740	.7102	.5000	.2898	.1260	.0333	.0027
	4	.9998	.9953	.9871	.9712	.9037	.7734	.5801	.3529	.1480	.0257
	5	1.0000	.9996	.9987	.9962	.9812	.9375	.8414	.6706	.4233	.1497
	6		1.0000	.9999	.9998	.9984	.9922	.9720	.9176	.7903	.5217
	7			1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

تابع جدول رقم (2)

n	x	.10	.20	.25	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
8	0	.4305	.1678	.1001	.0576	.0168	.0039	.0007	.0001	.0000	
	1	.8131	.5033	.3671	.2553	.1064	.0352	.0085	.0013	.0001	
	2	.9619	.7969	.6785	.5518	.3154	.1445	.0498	.0113	.0012	.0000
	3	.9950	.9437	.8862	.8059	.5941	.3633	.1737	.0580	.0104	.0004
	4	.9996	.9896	.9727	.9420	.8263	.6367	.4059	.1941	.0563	.0050
	5	1.0000	.9988	.9958	.9887	.9502	.8555	.6846	.4482	.2031	.0381
	6		.9991	.9996	.9987	.9915	.9648	.8936	.7447	.4967	.1869
	7		1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9961	.9832	.9424	.8322	.5695
	8				1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0	.3874	.1342	.0751	.0404	.0101	.0020	.0003	.0000		
	1	.7748	.4362	.3003	.1960	.0705	.0195	.0038	.0004	.0000	
	2	.9470	.7382	.6007	.4628	.2318	.0898	.0250	.0043	.0003	.0000
	3	.9917	.9144	.8343	.7297	.4826	.2539	.0994	.0253	.0031	.0001
	4	.9991	.9804	.9511	.9012	.7334	.5000	.2666	.0988	.0196	.0009
	5	.9999	.9969	.9900	.9747	.9006	.7461	.5174	.2703	.0856	.0083
	6	1.0000	.9997	.9987	.9957	.9750	.9102	.7682	.5372	.2618	.0530
	7		1.0000	.9999	.9996	.9962	.9805	.9295	.8040	.5638	.2252
	8			1.0000	1.0000	.9997	.9980	.9899	.9596	.8658	.6126
	9					1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	.3487	.1074	.0563	.0282	.0060	.0010	.0001	.0000		
	1	.7361	.3758	.2440	.1493	.0464	.0107	.0017	.0001	.0000	
	2	.9298	.6778	.5256	.3828	.1673	.0547	.0123	.0015	.0001	
	3	.9872	.8791	.7759	.6496	.3823	.1719	.0548	.0106	.0009	.0000
	4	.9984	.9672	.9219	.8497	.6331	.3770	.1662	.0474	.0064	.0002
	5	.9999	.9936	.9803	.9527	.8338	.6230	.3669	.1503	.0328	.0016
	6	1.0000	.9991	.9965	.9894	.9452	.8281	.6177	.3504	.1209	.0128
	7		.9999	.9996	.9984	.9877	.9453	.8327	.6172	.3222	.0702
	8		1.0000	1.0000	.9999	.9983	.9893	.9536	.8507	.6242	.2639
	9				1.0000	.9999	.9990	.9940	.9718	.8926	.6513
	10					1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	0	.3138	.0859	.0422	.0198	.0036	.0005	.0000			
	1	.6974	.3221	.1971	.1130	.0302	.0059	.0007	.0000		
	2	.9104	.6174	.4552	.3127	.1189	.0327	.0059	.0006	.0000	
	3	.9815	.8369	.7133	.5696	.2963	.1133	.0293	.0043	.0002	
	4	.9972	.9496	.8854	.7897	.5328	.2744	.0994	.0216	.0020	.0000
	5	.9997	.9883	.9657	.9218	.7535	.5000	.2465	.0782	.0117	.0003
	6	1.0000	.9980	.9924	.9784	.9006	.7256	.4672	.2103	.0504	.0028
	7		.9998	.9988	.9957	.9707	.8867	.7037	.4304	.1611	.0185
	8		1.0000	.9999	.9994	.9941	.9673	.8811	.6873	.3826	.0896
	9			1.0000	1.0000	.9993	.9941	.9698	.8870	.6779	.3026
	10					1.0000	.9995	.9964	.9802	.9141	.6862
	11						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(p)

جدول رقم (3)

الدالة الأسية

x	e^{-x}	e^{x}
.01	.9900	1.0101
.02	.9802	1.0202
.03	.9704	1.0305
.04	.9608	1.0408
.05	.9512	1.0513
.06	.9418	1.0618
.07	.9324	1.0725
.08	.9231	1.0833
.09	.9139	1.0942
.10	.9048	1.1052
.20	.8187	1.2214
.30	.7408	1.3499
.40	.6703	1.4918
.50	.6065	1.6487
.60	.5488	1.8221
.70	.4966	2.0138
.80	.4493	2.2255
.90	.4066	2.4596
1.00	.3679	2.7183
2.00	.1353	7.3891
3.00	.04979	20.0886
4.00	.01832	54.598
5.00	.00674	148.41
6.00	.00248	403.43
7.00	.000912	1096.6
8.00	.000335	2981.0
9.00	.000123	8103.1
10.00	.000045	22026.0

جدول رقم (4)

احتمالات توزيع بواسون

$$e^{-\lambda}\lambda^{x}/x!$$

للقيم

$$\lambda = 0.1(0.1)2(0.2)4(!)10$$

λ \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.1	.9048	.0905	.0045	.0002	.0000								
.2	.8187	.1637	.0164	.0011	.0001	.0000							
.3	.7408	.2222	.0333	.0033	.0002	.0000							
.4	.6703	.2681	.0536	.0072	.0007	.0001	.0000						
.5	.6065	.3033	.0758	.0126	.0016	.0002	.0000						
.6	.5488	.3293	.0988	.0198	.0030	.0004	.0000						
.7	.4966	.3476	.1217	.0284	.0050	.0007	.0001	.0000					
.8	.4193	.3595	.1438	.0383	.0077	.0012	.0002	.0000					
.9	.4066	.3859	.1647	.0494	.0111	.0020	.0003	.0000					
1.0	.3679	.3679	.1839	.0613	.0153	.0031	.0005	.0001	.0000				
1.1	.3329	.3662	.2014	.0738	.0203	.0045	.0008	.0001	.0000				
1.2	.3012	.3614	.2169	.0867	.0260	.0062	.0012	.0002	.0000				
1.3	.2725	.3543	.2303	.0998	.0324	.0084	.0013	.0003	.0001	.0000			
1.4	.2466	.3452	.2417	.1128	.0395	.0111	.0026	.0005	.0001	.0000			
1.5	.2231	.3347	.2510	.1255	.0471	.0141	.0035	.0008	.0001	.0000			
1.6	.2019	.3230	.2584	.1378	.0551	.0176	.0047	.0011	.0002	.0000			
1.7	.1827	.3108	.2640	.1496	.0636	.0216	.0061	.0015	.0003	.0001	.0000		
1.8	.1653	.2975	.2678	.1607	.0723	.0260	.0078	.0020	.0005	.0001	.0000		
1.9	.1496	.2842	.2700	.1710	.0812	.0309	.0098	.0027	.0006	.0001	.0000		
2.0	.1353	.2707	.2707	.1804	.0902	.0361	.0120	.0034	.0009	.0002	.0000		
2.2	.1108	.2438	.2681	.1966	.1082	.0476	.0174	.0055	.0015	.0004	.0001	.0000	
2.4	.0907	.2177	.2613	.2090	.1254	.0602	.0241	.0083	.0025	.0007	.0002	.0000	
2.6	.0743	.1931	.2510	.2176	.1414	.0735	.0319	.0118	.0038	.0011	.0003	.0001	.0000
2.8	.0608	.1703	.2384	.2225	.1557	.0872	.0407	.0163	.0057	.0018	.0005	.0001	.0000
3.0	.0498	.1494	.2240	.2240	.1680	.1008	.0504	.0216	.0081	.0027	.0008	.0002	.0001
3.2	.0408	.1304	.2087	.2226	.1781	.1140	.0608	.0278	.0111	.0040	.0013	.0004	.0001
3.4	.0334	.1135	.1929	.2186	.1858	.1264	.0716	.0348	.0148	.0056	.0019	.0006	.0002
3.6	.0273	.0984	.1771	.2125	.1912	.1377	.0826	.0425	.0191	.0076	.0028	.0009	.0003
3.8	.0224	.0850	.1615	.2046	.1944	.1477	.0936	.0508	.0241	.0102	.0039	.0013	.0004
4.0	.0183	.0733	.1465	.1954	.1954	.1563	.1042	.0595	.0298	.0132	.0053	.0019	.0006
5.0	.0067	.0337	.0842	.1404	.1755	.1755	.1462	.1044	.0653	.0363	.0181	.0082	.0034
6.0	.0025	.0149	.0446	.0892	.1339	.1606	.1606	.1377	.1033	.0688	.0413	.0225	.0113
7.0	.0009	.0064	.0223	.0521	.0912	.1277	.1490	.1490	.1304	.1014	.0710	.0452	.0264
8.0	.0003	.0027	.0107	.0286	.0573	.0916	.1221	.1396	.1396	.1241	.0993	.0722	.0481
9.0	.0001	.0011	.0050	.0150	.0337	.0607	.0911	.1171	.1318	.1318	.1186	.0970	.0728
10.0	.0000	.0005	.0023	.0076	.0189	.0378	.0631	.0901	.1126	.1251	.1251	.1137	.0948

λ \ x	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
5.0	.0013	.0005	.0002									
6.0	.0052	.0022	.0009	.0003	.0001							
7.0	.0142	.0071	.0033	.0014	.0006	.0002	.0001					
8.0	.0296	.0169	.0090	.0045	.0021	.0009	.0004	.0002	.0001			
9.0	.0504	.0324	.0194	.0109	.0058	.0029	.0014	.0006	.0003	.0001		
10.0	.0729	.0521	.0347	.0217	.0128	.0071	.0037	.0019	.0009	.0004	.0002	.0001

جدول رقم (5)

دالة التوزيع التراكمية لتوزيع بواسون

$$\sum_{s=0}^{x} e^{-\lambda}\lambda^{s}/s!$$

x	λ = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6730	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5				1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997
6							1.0000	1.0000	1.0000

x	λ = 1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8		1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9			1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10				0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11				1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12					1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13						1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14							1.0000	0.9999	0.9998
15								1.0000	0.9999
16									1.0000

تابع جدول رقم (5)

x	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5
0	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0266	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008
2	0.0884	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042
3	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149
4	0.3575	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403
5	0.5289	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885
6	0.6860	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649
7	0.8095	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687
8	0.8944	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918
9	0.9462	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218
10	0.9747	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453
11	0.9890	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520
12	0.9955	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364
13	0.9983	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981
14	0.9994	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400
15	0.9998	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665
16	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823
17	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911
18		1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9976	0.9957
19			1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980
20					1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991
21						1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
22							1.0000	0.9999	0.9999
23								1.0000	0.9999
24									1.0000

جدول رقم (6)

الدالة الكثافة للتوزيع الطبيعي القياسي

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009
3.5	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3.6	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0004
3.7	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003	.0003	.0003
3.8	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
3.9	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001

جدول رقم (7)

الدالة التراكمية للتوزيع الطبيعي القياسي

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} dt$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9398	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9952

x	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(x)$	.90	.95	.975	.99	.995	.999	.9995	.99995	.999995
$2[1-\Phi(x)]$	.20	.10	.05	.02	.01	.002	.001	.0001	.00001